1. Grundkonzepte im endlich-dimensionalen Fall

Einige Grundbegriffe der optimalen Steuerung lassen sich sehr einfach an Optimierungsaufgaben im Euklidischen Raum mit endlich vielen Gleichungsrestriktionen erläutern.

1.1 Endlichdimensionale Aufgabe der optimalen Steuerung

Es seien eine zu minimierende Zielfunktion $J = J(y,u)$, $J: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, eine $n \times n$-Matrix, eine $n \times m$-Matrix B sowie eine nichtleere Menge $U_{ad} \subset \mathbb{R}^m$ gegeben („ad" für admissible, zulässig). Wir betrachten

$$\min J(y,u) \quad \text{unter den Nebenbedingungen (u.d.N.)} \quad Ay = Bu, \quad u \in U_{ad} \tag{1.1}$$

Es sind also Vektoren y und u gesucht, welche die Zielfunktion J unter den Nebenbedingungen $Ay = Bu$ sowie $u \in U_{ad}$ minimieren.

Beispiel 1.1 Oft werden quadratische Zielfunktionen verwendet, etwa

$$J(y,u) = \frac{1}{2}|y - y_d|^2 + \frac{\lambda}{2}|u|^2, \quad y_d \in \mathbb{R}^n \text{ und } \lambda \geq 0,$$

wobei $|\cdot|$ die Euklidische Norm bezeichnet $\Diamond$

Noch hat (1.1) die Form einer normalen Optimierungsaufgabe, bei der y und u gleichberechtigt sind. Jetzt fordern wir zusätzlich, dass A eine invertierbare Matrix ist. Dann kann (1.1) nach y aufgelöst werden:

$$y = A^{-1}Bu. \tag{1.2}$$

Zu beliebigem $u \in \mathbb{R}^m$ gibt es genau eine Lösung $y \in \mathbb{R}^n$. Man kann u beliebig wählen („steuern") und immer stellt sich als abhängige Größe genau ein y ein. Wir bezeichnen daher u als <u>Steuerungsvektor</u> oder kurz als <u>Steuerung</u> und y als den zugehörigen <u>Zustandsvektor</u> bzw. Zustand. Auf diese Weise wird (1.1) zu einer endlichdimensionalen Aufgabe der Optimalsteuerung.

Wir führen die Matrix $S: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $S = A^{-1}B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ein. Das ist die Lösungsmatrix unseres Steuersystems, und es gilt $y = Su$. Mit (1.2) können wir y in J eliminieren und erhalten eine reduzierte Zielfunktion $\hat{J}$,

$$J(y,u) = J(Su,u) =: \hat{J}(u).$$

Für die quadratische Funktion aus Beispiel 1.1 ergibt sich

$$\hat{J}(u) = \frac{1}{2}|Su - y_d|^2 + \frac{\lambda}{2}|u|^2$$

Damit wird (1.1) zur nichtlinearen Optimierungsaufgabe

$$\min \hat{J}(u) \quad \text{u.d.N.} \quad u \in U_{ad} \tag{1.3}$$

Bei diesem auf u reduzierten Problem tritt nur die Steuerung u als Unbekannte auf.

1.2 Existenz optimaler Steuerungen

Definition 1.2. Ein Vektor $u^* \in U_{ad}$ heißt optimale Steuerung für (1.1), wenn $\hat{J}(u^*) \le \hat{J}(u)$ für alle $u \in U_{ad}$ gilt; $y^* = Su^*$ heißt zu u^* gehöriger optimaler Zustand.

Satz 1.3 Ist J stetig auf $\mathbb{R}^n \times U_{ad}$, die Menge U_{ad} nichtleer, beschränkt und abgeschlossen sowie A invertierbar, dann existiert mindestens eine optimale Steuerung für (1.1)

Beweis. Mit J ist auch $\hat{J}$ stetig auf U_{ad}. Außerdem ist U_{ad} als beschränkte und abgeschlossene Menge in $\mathbb{R}^m$ kompakt. Der Satz von Weierstraß sichert, dass $\hat{J}$ ein Minimum in U_{ad} annimmt. Es existiert also ein $u^* \in U_{ad}$ mit der Eigenschaft $\hat{J}(u^*) \le \hat{J}(u)$ für alle $u \in U_{ad}$. $\square$

Bei Optimalsteuerproblem für Differentialgleichungen wird dieser Beweis komplizierter, weil beschränkte und abgeschlossene Mengen in (unendlichdimensionalen) Funktionenräumen nicht notwendig

Kompakt sind.

1.3 Notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung

In diesem Abschnitt wird behandelt, welche Bedingungen optimale Vektoren u^* und y^* erfüllen müssen. Damit verbindet man die Erwartung aus diesen Bedingungen u^* und y^* ermitteln zu können. In der Regel muss das mit numerischen Verfahren geschehen.

Wir verwenden folgende Bezeichnungen für Ableitungen von Funktionen $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$:

$$D_i := \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad D_x = \frac{\partial}{\partial x} \qquad \text{(partielle Ableitungen)}$$

$$f'(x) = (D_1 f(x), \dots, D_m f(x)) \qquad \text{(Ableitung)}$$

$$\nabla f(x) = f'(x)^T \qquad \text{(Gradient)}$$

Für Funktionen $f = f(x,y): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ bezeichnet $D_x f$ den Zeilenvektor der partiellen Ableitungen von f nach $x_1, \dots, x_n$ und $\nabla_x f$ den entsprechenden Spaltenvektor. Analog sind $D_y f$ und $\nabla_y f$ erklärt. Weiter sei

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{R}^m} = u \cdot v = \sum_{i=1}^m u_i v_i$$

das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^m$. Die Anwendung von $\hat{J}'(u)$ auf einen Spaltenvektor $h \in \mathbb{R}^m$, gegeben durch das Produkt $\hat{J}'(u)h$, ergibt die Richtungsableitung in Richtung h,

$$\hat{J}'(u)h = \langle \nabla \hat{J}(u), h \rangle_{\mathbb{R}^m} = \nabla \hat{J}(u) \cdot h$$

Wir setzen jetzt zusätzlich voraus, dass die Zielfunktion J stetig partiell nach y und u differenzierbar ist. Die partiellen Ableitungen nach y bzw. u, $D_y J(y,u)$ und $D_u J(y,u)$, sollen also stetig in (y,u) sein. Aus der Kettenregel folgt dann die stetige Differenzierbarkeit von $\hat{J}(u) = J(Su, u)$.

Beispiel 1.4 Wir betrachten die Zielfunktion aus Beispiel 1.1, d.h.,

$$\hat{J}(u) = \frac{1}{2}|Su - y_d|^2 + \frac{\lambda}{2}|u|^2$$

Hier ergibt sich

$$\nabla \hat{J}(u) = S^T(Su - y_d) + \lambda u \in \mathbb{R}^m, \quad \hat{J}'(u) = (S^T(Su - y_d) + \lambda u)^T$$

$$\hat{J}'(u)h = \langle S^T(Su - y_d) + \lambda u, h\rangle_{\mathbb{R}^m}$$

<u>Satz 1.5.</u> Ist u^* optimale Steuerung für (1.1) und ist U_{ad} konvex, dann genügt u^* der Variationsungleichung

$$\hat{J}'(u^*)(u-u^*) \geq 0 \qquad \forall u \in U_{ad}.$$

<u>Beweis.</u> Wir wählen $u \in U_{ad}$ beliebig aus und betrachten die konvexe Linearkombination

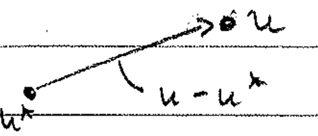
$$u(t) = u^* + t(u-u^*) = (1-t)u^* + tu$$

für beliebiges $t \in (0,1]$. Die Konvexität von U_{ad} sichert $u(t) \in U_{ad}$. Aus der Optimalität von u^* folgt $\hat{J}(u(t)) \geq \hat{J}(u^*)$, also auch

$$\frac{1}{t}\left(\hat{J}(u^* + t(u-u^*)) - \hat{J}(u^*)\right) \geq 0. \tag{1.4}$$

Nach Grenzübergang $t \downarrow 0$ ergibt sich $\hat{J}'(u^*)(u-u^*) \geq 0$, die Variationsungleichung. □

Die Aussage drückt die Beobachtung aus, dass die Funktion $\hat{J}$ an der Stelle eines Minimums in keiner Richtung fallen kann.



Mit der Kettenregel und dem Satz über das totale Differential wird die Ableitung $\hat{J}'$ in (1.4) durch

$$\hat{J}' = D_y J\, S + D_u J$$

berechnet. Also erhalten wir

$$\begin{aligned}\hat{J}'(u^*)h &= D_y J(Su^*, u^*) S h + D_u J(Su^*, u^*) h \\ &= \langle \nabla_y J(y^*, u^*), A^{-1}B h\rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle \nabla_u J(y^*, u^*), h\rangle_{\mathbb{R}^m} \\ &= \langle B^T A^{-T} \nabla_y J(y^*, u^*) + \nabla_u J(y^*, u^*), h\rangle_{\mathbb{R}^m}\end{aligned} \tag{1.5}$$

Die Variationsungleichung (1.4) nimmt also die etwas unübersichtliche Form

$$\langle B^T A^{-T} \nabla_y J(y^*,u^*) + \nabla_u J(y^*,u^*), u - u^* \rangle_{\mathbb{R}^m} \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad} \qquad (1.6)$$

an. Durch Einführung des adjungierten Zustands, einem einfachen, für die Theorie der optimalen Steuerung entscheidenden Trick, kann man (1.6) deutlich vereinfachen.

1.4 Adjungierte Zustand und reduzierte Gradient

Wir nehmen zur Motivation an, dass die Verwendung der inversen Matrix A^{-1} für numerische Rechnungen zu aufwendig ist. Dies ist bei realistischen Optimalsteuerproblemen meist der Fall. Statt dessen soll ein numerisches Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme der Form $Ax = b$ verwendet werden, dass A^{-1} nicht direkt benutzt. Gleiches trifft dann auf A^T zu. Deshalb ersetzen wir in (1.6) den Ausdruck $A^{-T} \nabla_y J(y^*,u^*)$ durch

$$p^* = -A^{-T} \nabla_y J(y^*,u^*),$$

d.h.,

$$A^T p^* = -\nabla_y J(y,u) \qquad (1.7).$$

Definition 1.7 Die Gleichung (1.7) heißt adjungierte/duale Gleichung. Ihre Lösung p^* wird zu (y^*,u^*) gehöriger adjungierter/dualer Zustand genannt.

Beispiel 1.8. Für $J(y,u) = \frac{\alpha}{2}|y-y_d|^2 + \frac{\lambda}{2}|u|^2$ erhalten wir

$$A^T p^* = -(y^* - y_d),$$

denn es gilt $\nabla_y J(y^*,u^*) = y^* - y_d$. ◊

Die Einführung des adjungierten Zustands bringt zwei Vorteile. Die notwendigen Bedingungen erster Ordnung werden übersichtlicher und die Verwendung von A^{-T} kann vermieden werden.

Mit $y^* = Su^*$ und (1.5) folgt

$$\nabla \hat{J}(u^*) = -B^T p^* + \nabla_u J(y^*,u^*).$$

Der Vektor $\nabla \hat{J}(u^*)$ heißt auch (auf u) reduzierter Gradient. Wir erhalten für die Richtungsableitung

$$\hat{J}'(u^*)h = \langle -B^T p^* + \nabla_u J(y^*, u^*), h \rangle_{\mathbb{R}^m}$$

mit $y^* = Su^*$. Satz 1.5 vereinfacht sich nun wie folgt.

Satz 1.8 Die Matrix A sei invertierbar, u^* eine optimale Steuerung für (1.1) und y^* der zugehörige optimale Zustand. Dann existiert genau eine Lösung p^* der adjungierten Gleichung (1.7), und es gilt

$$\langle -B^T p^* + \nabla_u J(y^*, u^*), u - u^* \rangle_{\mathbb{R}^m} \geq 0 \qquad \forall u \in U_{ad}. \tag{1.8}$$

Wir erhalten somit folgendes Optimalitätssystem für die drei unbekannten Vektoren $y^* \in \mathbb{R}^n$, $u^* \in \mathbb{R}^m$ und $p^* \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} Ay &= Bu, \qquad u \in U_{ad} \\ A^T p &= -\nabla_y J(y, u) \\ \langle -B^T p + \nabla_u J(y, u), v - u \rangle_{\mathbb{R}^m} &\geq 0 \qquad \forall v \in U_{ad} \end{aligned} \tag{1.9}$$

Jede Lösung (y^*, u^*) muß zusammen mit p^* das System (1.9) erfüllen.

Im Fall $U = \mathbb{R}^m$ kann $u - u^*$ jeden Wert $h \in \mathbb{R}^m$ annehmen. Also folgt aus (1.8) die Gleichung:

$$-B^T p^* + \nabla_u J(y^*, u^*) = 0.$$

Beispiel 1.9 Gegeben sei $J(y,u) = \frac{1}{2}|Cy - y_d|^2 + \frac{\lambda}{2}|u|^2$ mit $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\lambda > 0$. Wir berechnen

$$\nabla_y J(y,u) = C^T(Cy - y_d), \quad \nabla_u J(y,u) = \lambda u.$$

Es ergibt sich das Optimalitätssystem

$$\begin{aligned} Ay &= Bu, \quad u \in U_{ad} \\ A^T p &= -C^T(Cy - y_d) \\ \langle -B^T p + \lambda u, v - u \rangle_{\mathbb{R}^m} &\geq 0 \qquad \forall v \in U_{ad} \end{aligned}$$

Bei $U_{ad} = \mathbb{R}^m$ folgt $B^T p = \lambda u$, d.h.,

$$u^* = \frac{1}{\lambda} B^T p^*. \tag{1.10}$$

Durch Einsetzen ergibt sich

$$A y = \frac{1}{\lambda} B B^T p$$
$$A^T p = -C^T (C y - y_d),$$

also ein lineares Gleichungssystem für (y, p):

$$\begin{pmatrix} A & -\frac{1}{\lambda} B B^T \\ C^T C & A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ C^T y_d \end{pmatrix}.$$

Sind y^* und p^* berechnet, so erhalten wir u^* aus (1.10). ◊

1.5 Lagrangefunktion

Mit Hilfe der aus der Analysis bekannten Lagrangefunktion kann man das Optimalitätssystem auch als Lagrangesche Multiplikatorenregel formulieren.

Definition 1.10 Die Funktion $L : \mathbb{R}^{2n+m} \to \mathbb{R}$ mit

$$L(y, u, p) := J(y, u) + \langle A y - B u, p \rangle_{\mathbb{R}^m}, \quad (y, u, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n,$$

heißt Lagrangefunktion.

Mit L kann man in (1.1) formal die Nebenbedingungen in Gleichungsform eliminieren, während die Restriktion $u \in U_{ad}$ zunächst noch explizit mitgeschleppt wird. Es gelten mit (1.9)

$$\nabla_y L(y^*, u^*, p^*) = \nabla_y J(y^*, u^*) + A^T p^* = 0$$
$$\langle \nabla_u L(y^*, u^*, p^*), u - u^* \rangle_{\mathbb{R}^m} = \langle -B^T p^* + \nabla_u J(y^*, u^*), u - u^* \rangle_{\mathbb{R}^m} \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}$$

Es ist also (1.7) äquivalent zu $\nabla_y L(y^*, u^*, p^*) = 0$. Ferner erhalten wir (1.8) mit $\langle \nabla_u L(y^*, u^*, p^*), u - u^* \rangle_{\mathbb{R}^m} \geq 0$ für alle $u \in U_{ad}$. Daher erfüllt (y^*, u^*) die notwendigen Optimalitätsbedingungen von

$$\min_{y, u} L(y, u, p^*), \quad u \in U_{ad}, \; y \in \mathbb{R}^n \qquad (1.11)$$

Zu beachten ist, dass in (1.11) p^* unbekannt ist.

1.6 Diskussion der Variationsungleichung

Häufig hat U_{ad} die folgende Struktur (Box-Restriktionen):

$$U_{ad} = \{ u \in \mathbb{R}^m \mid u_a \le u \le u_b \}. \qquad (1.12)$$

Hier sind $u_a \le u_b$ fest vorgegeben und die Ungleichungen komponentenweise zu verstehen. Wir schreiben (1.8) um:

$$\langle -B^T p^* + \nabla_u J(y^*, u^*), u^* \rangle_{\mathbb{R}^m} \le \langle -B^T p^* + \nabla_u J(y^*, u^*), u \rangle_{\mathbb{R}^m} \quad \forall u \in U_{ad}.$$

Damit löst u^* die lineare Optimierungsaufgabe

$$\min_{u \in U_{ad}} \langle -B^T p^* + \nabla_u J(y^*, u^*), u \rangle_{\mathbb{R}^m} = \min_{u \in U_{ad}} \sum_{i=1}^m (-B^T p^* + \nabla_u J(y^*, u^*))_i u_i$$

Ist U_{ad} von der Form (1.12), so folgt aus der Unabhängigkeit der einzelnen u_i komponentenweise

$$(-B^T p^* + \nabla_u J(y^*, u^*))_i u_i^* = \min_{u_{a,i} \le u_i \le u_{b,i}} (-B^T p^* + \nabla_u J(y^*, u^*))_i u_i,$$

$1 \le i \le m$. Also gilt

$$u_i^* = \begin{cases} u_{b,i}, & \text{falls } (-B^T p^* + \nabla_u J(y^*, u^*))_i < 0, \\ u_{a,i}, & \text{falls } (-B^T p^* + \nabla_u J(y^*, u^*))_i > 0 \end{cases} \qquad (1.13)$$

gelten. Für die Komponenten $(-B^T p^* + \nabla_u J(y^*, u^*))_i = 0$ bringt (1.8) keine Information. Meist liefert das aber eine auswertbare Gleichung.

1.7 Formulierung als Karush-Kuhn-Tucker-System

Bisher haben wir bei der Lagrangefunktion nur die Gleichungsrestriktionen berücksichtigt. Das kann man auch mit den in (1.2) steckenden Ungleichungsrestriktionen machen. Definiere

$$\begin{aligned} \mu_a &= (-B^T p^* + \nabla_u J(y^*, u^*))_+, \\ \mu_b &= (-B^T p^* + \nabla_u J(y^*, u^*))_-, \end{aligned} \qquad (1.14)$$

d.h., $\mu_{a,i} = (-B^T p^* + \nabla_u J(y^*, u^*))_i$, wenn die rechte Seite positiv ist, ansonsten $\mu_{a,i} = 0$ sowie $\mu_{b,i} = |(-B^T p^* + \nabla_u J(y^*, u^*))_i|$, wenn die rechte Seite negativ ist, andernfalls $\mu_{b,i} = 0$. Mit (1.13) folgt

$$\mu_a \ge 0, \quad u_a - u^* \le 0, \quad \langle u_a - u^*, \mu_a \rangle_{\mathbb{R}^m} = 0$$

$$\mu_b \ge 0, \quad u^* - u_b \le 0, \quad \langle u^* - u_b, \mu_b \rangle_{\mathbb{R}^m} = 0.$$

Das sind die aus der Optimierung bekannten Komplementären Schlupf-

bedingungen/ Komplementaritätsbedingungen. Die Ungleichungen sind klar, nur die Schlupfbedingungen muß man sich überlegen. Das sieht für die erste Schlupfbedingung wie folgt aus: Im Fall $u_{a,i} < u_i^*$ ergibt mit (1.13) sofort $(-B^T p^* + \nabla_u J(y^*, u^*))_i \leq 0$. Das impliziert $\mu_{a,i} = 0$, also $(u_{a,i} - u_i^*) \mu_{a,i} = 0$. Gilt $\mu_{a,i} > 0$, so muß $(-B^T p^* + \nabla_u J(y^*, u^*))_i > 0$ sein. Also bekommen wir $u_{a,i} = u_i^*$ mit (1.13). Wieder gilt $(u_{a,i} - u_i^*) \mu_{a,i} = 0$. Summation über i ergibt $\langle u_a - u^*, \mu_a \rangle_{\mathbb{R}^m} = 0$.
Aus (1.14) erhalten wir

$$\mu_a - \mu_b = -B^T p^* + \nabla_u J(y^*, u^*))_i$$

also

$$\nabla_u J(y^*, u^*) - B^T p^* - \mu_a + \mu_b = 0 \qquad (1.15)$$

Wir erweitern nun L wie folgt:

$$L(y, u, p, \mu_a, \mu_b) = L(y, u, p) + \langle u_a - u, \mu_a \rangle_{\mathbb{R}^m} + \langle u - u_b, \mu_b \rangle_{\mathbb{R}^m}.$$

Dann erhalten wir (1.15) durch

$$\nabla_u L(y^*, u^*, p^*, \mu_a, \mu_b) = 0.$$

Außerdem ist die adjungierte Gleichung äquivalent mit

$$\nabla_y L(y^*, u^*, p^*, \mu_a, \mu_b) = 0.$$

Die Vektoren μ_a und μ_b sind damit die Lagrangeschen Multiplikatoren zu $u_a - u \leq 0$ und $u - u_b \leq 0$.

<u>Satz 1.11.</u> Ist u^* eine optimale Steuerung für (1.1) mit zugehörigem Zustand y^*, A invertierbar, und U_{ad} von der Form (1.12). Dann existieren Lagrange-Multiplikatoren $p^* \in \mathbb{R}^n$ und $\mu_a, \mu_b \in \mathbb{R}^m$, so dass

$$\nabla_y L(y^*, u^*, p^*, \mu_a, \mu_b) = 0$$
$$\nabla_u L(y^*, u^*, p^*, \mu_a, \mu_b) = 0$$
$$\mu_a \geq 0, \ \mu_b \geq 0$$
$$\langle u_a - u^*, \mu_a \rangle_{\mathbb{R}^m} = \langle u^* - u_b, \mu_b \rangle_{\mathbb{R}^m} = 0.$$

Zusätzlich gelten

$$Ay^* = Bu^* \quad \text{und} \quad u_a \leq u^* \leq u_b$$

Das sind die sogenannten Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen.

Wir formulieren noch die hinreichenden Bedingungen zweiter Ordnung. Dazu führen wir die Indexmengen der aktiven Ungleichungsrestriktionen $I(u^*) = I_a(u^*) \cup I_b(u^*)$ und der starke aktiven Ungleichungsrestriktionen $A(u^*) \subset I(u^*)$ ein:

$$I_a(u^*) = \{i : u_i^* = u_{a,i}\}, \quad I_b(u^*) = \{i : u_i^* = u_{b,i}\},$$
$$A(u^*) = \{i : \mu_{a,i} > 0 \text{ oder } \mu_{b,i} > 0\}.$$

Ferner definieren wir den kritischen Kegel $C(u^*)$ aller $h \in \mathbb{R}^m$ mit

$$h_i = 0 \quad \text{für } i \in A(u^*),$$
$$h_i \geq 0 \quad \text{für } i \in I_a(u^*) \setminus A(u^*),$$
$$h_i \leq 0 \quad \text{für } i \in I_b(u^*) \setminus A(u^*).$$

Nach Definition von μ_a, μ_b gilt $i \in A(u^*) \iff |(-B^T p^* + \nabla_u J(y^*, u^*))_i| > 0$. Eine aktive Restriktion für u ist also genau dann starkaktiv, wenn die entsprechende Komponente des Gradienten von f nicht verschwindet.

<u>Satz 1.12.</u> U_{ad} habe die Form (1.12). Erfüllen y^* und u^* gemeinsam das obige Optimalitätssystem und gilt

$$\begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} L_{yy}(y^*, u^*, p^*, \mu_a, \mu_b) & L_{yu}(y^*, u^*, p^*, \mu_a, \mu_b) \\ L_{uy}(y^*, u^*, p^*, \mu_a, \mu_b) & L_{uu}(y^*, u^*, p^*, \mu_a, \mu_b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix} > 0$$

für alle $(y, u) \neq (0, 0)$ mit $Ay = Bu$ und $u \in C(u^*)$, dann ist (y^*, u^*) lokal optimal für (1.1).

Im Satz bezeichnen $L_{yy}, L_{yu}, L_{uy}, L_{uu}$ die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung ($D_{yy}L, D_{yu}L, D_{uy}L, D_{uu}L$). Es folgt, dass die Definitheitsbedingung aus Satz 1 äquivalent mit der Existenz eines $\delta > 0$ sodass mit $z^* = (y^*, u^*, p^*, \mu_a, \mu_b)$

$$\begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} L_{yy}(z^*) & L_{yu}(z^*) \\ L_{uy}(z^*) & L_{uu}(z^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix} \geq \delta\,(|y|^2 + |u|^2)$$

für alle entsprechenden (y,u). Ist A invertierbar, so folgt sogar

$$\begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} L_{yy}(z^*) & L_{uy}(z^*) \\ L_{uy}(z^*) & L_{uu}(z^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix} \geq \tilde{\delta}\, \|u\|^2$$

mit einem $\tilde{\delta} > 0$.

2. Optimale Steuerung von gewöhnlichen Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt wenden wir uns Problemen der optimalen Steuerung zu, bei denen die Nebenbedingung $Ay = Bu$ in (1.1) durch ein Anfangswertproblem für eine gewöhnliche Differentialgleichung ersetzt wird.

2.1 Grundkonzepte

Wir betrachten die Steuerung eines Pendels in der Form

$$m\,\ddot{y}(t) + mg\,\sin(y(t)) = u(t) \quad \text{für } t > 0 \tag{2.1a}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = y_0 \quad \text{und} \quad \dot{y}(0) = v_0. \tag{2.1b}$$

In (2.1) bezeichnet $y(t)$ die Auslenkung zur Zeit t, m die Masse und g die Erdbeschleunigung. Mit $u(t)$ ist die zur Zeit t angewandte Kraft bezeichnet, so dass sich das dynamische System (2.1) in einer erhofften Art und Weise verhält. Wieder bezeichnen y den Zustand und u die Steuerung. Aufgrund des Terms $\sin(y(t))$ in (2.1a) ist (2.1) ein nichtlineares Steuerungsproblem.

Wir überführen (2.1) in ein System erster Ordnung. Seien dazu $x = (x_1, x_2)^T$ und $f(x,u) = (x_2, -g\sin x_1 + u)^T$ für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ und $u \in \mathbb{R}$. Ferner setzen wir $x_0 = (y_0, v_0)^T$. Dann ist (2.1) äquivalent mit dem autonomen System

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad t > 0, \qquad x(0) = x_0 \tag{2.2}$$

Die stationären Lösungen zu (2.2) sind durch $f(x, \bar{u}) = 0$ für $\bar{u} = 0$

charakterisiert. Offenbar gilt für $x=0$ und $x=\binom{\pi}{0}$ die Beziehung $f(x,0)=0$. Unser Ziel ist es (2.2) so zu steuern, dass der Zustand y möglichst nahe der stationären Lösung $\binom{\pi}{0}$ kommt. Daher führen wir das Zielfunktional

$$J(x,u) = \int_0^{t_f} |x_1(t)-\pi|^2 + |x_2(t)|^2 + \beta|u(t)|^2\,dt + \alpha\,(x_1(t_f)-\pi|^2 + |x_2(t)|^2 \tag{2.3}$$

mit $\alpha,\beta \geq 0$, $t_f > 0$ ein. Aufgabe ist es nun, (2.3) zu minimieren, wobei (x,u) das Problem (2.2) erfüllen.

Allgemein betrachten wir Optimalsteuerprobleme der folgenden Art

$$\min \int_0^{t_f} f^0(t,y(t),u(t))\,dt + g(t_f,y(t_f)) \tag{2.4a}$$

$$\text{u.d.N.}\quad y'(t) = f(t,y(t),u(t)) \quad \text{für } t\in(0,t_f],\ y(0)=y_0 \tag{2.4b}$$

$$\text{und } u\in \mathcal{U}_{ad} := \{v\in L^2(0,t_f;\mathbb{R}^m) \mid v(t)\in U_{ad}\} \tag{2.4c}$$

wobei $y:[0,t_f]\to\mathbb{R}^n$, $f:[0,t_f]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, $y_0\in\mathbb{R}^n$, $U_{ad}\subset\mathbb{R}^m$ abgeschlossen und konvex. Problem (2.4) wird auch Bolza-Problem genannt. Im Fall $f^0=0$ heißt (2.4) Lagrange-Problem, im Fall $g^0=0$ Mayer-Problem. Ist $t_f>0$ endlich, so ist ein (2.4) ein Problem mit einem endlichen Zeithorizont, ansonsten (mit $g=0$) eines mit einem unendlichen Zeithorizont. Ein sehr wichtiger Aspekt ist dabei die Stabilisierung von (2.4b).

Eine Lösung von (2.4) wird als optimale Steuerung u^* bezeichnet. Die zugehörige Lösung von (2.4b) für $u=u^*$ heißt dazugehöriger optimaler Zustand.

In manchen Situationen kann u^* als Funktion von y^* angegeben werden, das heißt $u^*(t)=K(y^*(t))$ für ein geeignetes K. In diesem Fall sagen wir, dass u^* in Feedback- oder Closed-Loop-Form gegeben ist.

Ist t_f selbst freie Variable und $f^0=0$, so heißt (2.4) Time-Optimal-Control-Problem.

Wir betrachten Linearisierungen von (2.4b) um eine stationäre Lösung von $f(\bar{y},\bar{u})=0$, wobei $\bar{u}$ eine nominelle konstante Steuerung bezeichnet. Seien

$$A = f_y(\bar{y},\bar{u}) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad B = f_u(\bar{y},\bar{u}) \in \mathbb{R}^{n\times m}. \tag{2.5}$$

Definiere $z(t) = y(t) - \bar{y}$ und $v(t) = u(t) - \bar{u}$. Wir setzen voraus, dass f zweimal stetig differenzierbar ist. Dann können wir (2.4b) wie folgt schreiben

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bv(t) + r(z(t), v(t)), \tag{2.6}$$

wobei

$$\|r(z(t),v(t))\|_2 \leq C\,(|z(t)|^2 + |v(t)|^2)$$

mit einer Konstanten $C>0$ gilt. Ist $r(z(t),v(t))$ klein, so wird (2.6) durch den linearen Teil $Az(t) + Bv(t)$ dominiert. In diesem Fall wird das Problem

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t), \quad t>0, \quad y(0) = y_0 - \bar{y} \tag{2.7}$$

betrachtet. Problem (2.7) wird lineares Steuerungsproblem bezeichnet.

Beispiel 2.1 Für das zu Beginn des Abschnitts betrachtete Problem des mathematischen Pendels erhalten wir $\bar{y} = (0,0)^T$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie für $\bar{y} = (0,\pi)^T$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad \Diamond$$

2.2 Lineare, invariante Systeme

Wir betrachten Probleme der Bauart (2.7). Eine der wesentlichen Aufgaben der optimalen Steuerung ist es, ein Rückkopplungs-/Feedback-Gesetz der Form $u(t) = -Ky(t)$ mit $K\in\mathbb{R}^{m\times n}$ zu finden. Eingesetzt in (2.7), erhalten wir dann das Closed-Loop-System

$$\dot{y}(t) = Ay(t) - BKy(t) = (A-BK)\,y(t), \quad t\geq 0. \tag{2.8}$$

Das Feedback-Gesetz soll nun garantieren, dass y asymptotisch

stabil im folgenden Sinn ist: $|y(t)| \to 0$ für $t \to \infty$ für alle Anfangsbedingungen $y_0 \in \mathbb{R}^4$.
Wir wissen aus der Analysis, dass ein System der Form
$$\dot{y}(t) = Ay(t), \quad t > 0,$$
asymptotisch stabil ist genau dann, wenn für alle Eigenwerte λ von A gilt $\operatorname{Re}\lambda < 0$.

<u>Beispiel 2.2.</u> Im Fall von Beispiel 2.1 erhalten wir für $\bar{y} = (0,0)^T$
$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + g = 0,$$
das heißt, $\lambda = \pm\sqrt{g}\, i$. Im Fall von $\bar{y} = (0,\pi)^T$ gilt
$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 - g = 0,$$
also $\lambda = \pm\sqrt{g}$. In beiden Fällen gilt nicht $\operatorname{Re}\lambda < 0$ für alle Eigenwerte. Wählen wir in (2.8) allerdings $K = (0,\gamma) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$, so gilt für $\bar{y} = (0,0)^T$
$$A - BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(0,\gamma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g & -\gamma \end{pmatrix},$$
also
$$\det(\lambda I - (A - BK)) = \det\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ g & \lambda+\gamma \end{pmatrix} = \lambda(\lambda+\gamma) + g$$
$$= \lambda^2 + 2\lambda\frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma^2}{4} - \left(\frac{\gamma^2}{4} - g\right) = \left(\lambda + \frac{\gamma}{2}\right)^2 - \left(\frac{\gamma^2}{4} - g\right) \overset{!}{=} 0$$
Wir erhalten die Eigenwerte $\lambda = \frac{1}{2}\left(-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4g}\right)$, also $\operatorname{Re}\lambda < 0$ für geeignetes $\gamma > 0$. ◇

Um ein optimales Feedback-Gesetz $u(t) = -Ky(t)$ für (2.7) zu konstruieren, betrachten wir das linear-quadratische Steuerproblem (LQR) mit einem unendlichen Zeithorizont
$$\min \int_0^\infty y(t)^T Q y(t) + u(t)^T R u(t)\, dt, \tag{2.9}$$
$$\text{u.d.N.} \quad \dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t), \quad t > 0, \quad y(0) = y_0,$$
wobei $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, positiv semidefinit und $R \in \mathbb{R}^{m\times m}$ symme-

trisch, positiv definit ist. Die optimale Lösung von (2.9) ist in Feedbackform

$$u^*(t) = -R^{-1} B^T P y^*(t) \qquad (2.10)$$

gegeben, wobei y^* das Problem löst

$$\dot{y}^*(t) = (A - BR^{-1}B^T P) y^*(t), \; t > 0, \quad y^*(0) = y_0 \qquad (2.11)$$

und die symmetrische, nichtnegative Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ der Matrix-Riccatigleichung

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \qquad (2.12)$$

genügt. Darauf kommen wir später zurück.

Wir wollen noch einen weiteren Aspekt diskutieren, der unter dem Namen Steuerbarkeit (Controllability) bekannt ist. Wir betrachten wieder (2.7) mit gegebenen Matrizen A, B und mit bekannter Anfangsbedingung y_0.

Definition 2.3. Das System (2.7) heißt steuerbar, wenn es ein $t_f > 0$ gibt, so dass für alle $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^n$ eine Steuerung $u \in L^2(0, t_f; \mathbb{R}^m)$ existiert mit $y(t_f) = y_1$.

Wir wollen eine algebraische Bedingung für Steuerbarkeit herleiten. Dazu verwenden wir, dass die Lösung für (2.9) durch

$$y(t) = e^{At} y_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} Bu(s)\, ds$$

gegeben ist. Damit ist (2.7) steuerbar, genau dann, wenn ein $t_f > 0$ und ein $u \in L^2(0, t_f; \mathbb{R}^m)$ existieren mit

$$\int_0^{t_f} e^{A(t_f - s)} Bu(s)\, ds = y_1 - e^{At_f} y_0 \qquad (2.13)$$

für beliebige $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^n$. Wir definieren den linearen Operator $L_{t_f} : L^2(0, t_f; \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^n$ durch

$$L_{t_f} u = \int_0^{t_f} e^{A(t_f - s)} Bu(s)\, ds.$$

Aus (2.13) folgt, dass (2.7) genau dann steuerbar ist, wenn $\mathrm{Ran}(L_{t_f}) = \mathbb{R}^n$ gilt. Wegen

$$\|L_{t_f}u\|^2_{L^2(0,t_f;\mathbb{R}^m)} \le \int_0^{t_f} \|e^{A(t_f-s)}Bu(s)\|^2 ds \le \int_0^{t_f} \|e^{A(t_f-s)}\|_2^2 \|B\|_2^2 |u(s)|^2 ds$$

$$= \int_0^{t_f} \Big\|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n(t_f-s)}{n!}\Big\|_2^2 \|B\|_2^2 |u(s)|^2 ds \le \|B\|_2^2 \int_0^{t_f} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n |t_f-s|^n}{n!}\Big)^2 |u(s)|^2 ds$$

$$\le e^{2\|A\| t_f} \|B\|_2^2 \|u\|^2_{L^2(0,t_f;\mathbb{R}^m)}$$

für $u \in L^2(0,t_f;\mathbb{R}^m)$ folgt, dass L_{t_f} beschränkt ist. Da $\operatorname{Ran}(L_{t_f}) \le n$ endlich ist, ist L_{t_f} sogar kompakt. Wir berechnen die adjungierte Abbildung $L^*_{t_f}: \mathbb{R}^n \to L^2(0,t_f;\mathbb{R}^m)$:

$$\langle L^*_{t_f} z, v\rangle_{L^2(0,t_f;\mathbb{R}^m)} = \int_0^{t_f} \langle (L^*_{t_f} z)(s), v(s)\rangle_{\mathbb{R}^m} ds$$
$$= \langle z, L_{t_f} v\rangle_{\mathbb{R}^n} = z^T \Big(\int_0^{t_f} e^{A(t_f-s)} B v(s)\, ds\Big)$$
$$= \int_0^{t_f} \big(B^T e^{A^T(t_f-s)} z\big)^T v(s)\, ds = \int_0^{t_f} \langle B^T e^{A^T(t_f-s)} z, v(s)\rangle_{\mathbb{R}^m} ds$$

für alle $z \in \mathbb{R}^n$ und alle $v \in L^2(0,t_f;\mathbb{R}^m)$. Also gilt

$$(L^*_{t_f} z)(s) = B^T e^{A^T(t_f-s)} z \quad \in L^2(0,t_f;\mathbb{R}^m).$$

Mit Hilfe der Theorie vom abgeschlossenen Bild (Funktionalanalysis: closed range theory) lässt sich zeigen, dass $\operatorname{Ran}(L_{t_f}) = \mathbb{R}^n$ genau dann gilt, wenn $L^*_{t_f}$ injektiv ist (d.h., $\operatorname{Null}(L^*_{t_f}) = \{0\}$). Das ist genau dann der Fall, wenn die Controllability Grammian

$$G_{t_f} := \int_0^{t_f} e^{A(t_f-s)} B B^T e^{A^T(t_f-s)} ds \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

folgende Eigenschaft hat

$$\langle z, G_{t_f} z\rangle_{\mathbb{R}^n} = \int_0^{t_f} |B^T e^{A^T(t_f-s)} z|^2 ds = 0 \implies z = 0, \tag{2.14}$$

d.h., die symmetrische, nichtnegative Matrix G_{t_f} ist invertierbar.

<u>Bemerkung 2.4.</u> Es lässt sich zeigen, dass

$$u_{t_f} = L^*_{t_f} G^{-1}_{t_f} (y_1 - e^{At_f} y_0)$$

die Lösung zu (2.13) mit minimaler Norm ist, das heißt, u_{t_f} minimiert $\int_0^{t_f} |u(s)|^2 ds$ unter allen $u \in L^2(0,t_f;\mathbb{R}^m)$ mit $L_{t_f} u = y_1 - e^{At_f} y_0$. ♦

Wir geben nun ein algebraische Kriterium für Steuerbarkeit an. Angenommen, die Abbildung $g(s) = B^T e^{A^T(t_f - s)} z$ ist Null auf einem Intervall $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset [0, t_f]$. Dann müssen auch alle Ableitungen von g an t_0 verschwinden:

$$g^{(k)}(t_0) = (-1)^k B^T (A^T)^k e^{A^T(t_f - t_0)} z = 0 \qquad \text{für alle } k \geq 0.$$

Dann folgt $B^T(A^T)^k = 0$ für $k = 0, \dots, n-1$. Gilt also

$$\text{Rang } [\underbrace{B, AB, \dots, A^{n-1}B}_{\in \mathbb{R}^{n \times (nm)}}] = n \tag{2.15}$$

(Rangbedingung von Kalman), so folgt $z = 0$. Es ist also (2.14) erfüllt. Haben wir andererseits

$$\text{Rang } [B, AB, \dots, A^{n-1}B] < n, \tag{2.16}$$

so argumentieren wir wie folgt: Aus dem Satz von Caley-Hamilton erhalten wir

$$A^n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k \quad \text{mit } a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R},$$

also

$$A^{n+j} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^{k+j} \quad \text{für } j \geq 0.$$

Aus (2.16) schließen wir, dass ein $z \neq 0$ existiert mit

$$[B, AB, \dots, A^{n-1}B]^T z = 0,$$

also

$$\begin{bmatrix} B^T z \\ B^T A^T z \\ \vdots \\ B^T (A^T)^{n-1} z \end{bmatrix} = 0.$$

Damit bekommen wir

$$g(s) = B^T e^{A^T(t_f - s)} z = B^T \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t_f - s)^k}{k!} (A^T)^k z$$

$$= \underbrace{B^T z}_{=0} + (t_f - s) \underbrace{B^T A^T z}_{=0} + \frac{(t_f - s)^2}{2} \underbrace{B^T (A^T)^2 z}_{=0} + \dots + \frac{(t_f - s)^{n-1}}{(n-1)!} \underbrace{B^T (A^T)^{n-1} z}_{=0}$$

$$+ \frac{(t_f - s)^n}{n!} \underbrace{B^T (A^T)^n z}_{= B^T (A^n)^T z = a_0 B^T z + a_1 B^T A^T z + \dots + a_{n-1} B^T (A^T)^{n-1} z = 0} + \dots \quad = 0.$$

Somit ist die Rangbedingung von Kalman äquivalent zu (2.13). Da die Rangbedingung unabhängig von t_f ist, so ist (2.7) genau dann steuerbar für ein $t_f > 0$, wenn es für alle $t_f > 0$ steuerbar ist.

Satz 2.5 (Kalmans Rangbedingung). Das System (2.7) ist genau dann steuerbar, wenn (2.15) gilt. Das ist genau dann der Fall, wenn die controllability grammian positiv definit ist. Die Steuerung u_{t_f} mit minimaler Norm, die $y(t)$ von y_0 nach $y_1 = y(t_f)$ bringt, ist gegeben durch $u_{t_f} = L_{t_f}^* G_{t_f}^{-1}(y_1 - e^{At_f} y_0)$.

2.3 Existenzaussagen und notwendige Optimalitätsbedingungen

Wir betrachten das Problem

$$\min J(y,u) = \int_0^{t_f} f^0(t, y(t), u(t))\, dt \tag{2.17a}$$

$$\text{u.d.N.} \quad \dot y(t) = f(t, y(t), u(t)),\ t \in (0, t_f],\quad y(0) = y_0, \tag{2.17b}$$

$$u \in L^2(0, t_f; \mathbb{R}^m),\quad u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m,\ U \text{ abgeschlossen}, \tag{2.17c}$$

$$\varphi(t_f, y(t_f)) = 0. \tag{2.17d}$$

In (2.17) seien $f: [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $f^0: [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ und $\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.

Beispiel 2.6 Im Fall $f^0 \equiv 1$, $\varphi(t,y) = y \in \mathbb{R}^n$ und t_f als freier Variablen dann ist es das Ziel von (2.17), den Zustand von y_0 nach $y(t_f) = 0$ in möglichst kurzer Zeit t_f zu bringen, wobei (2.17c) einzuhalten ist. $\Diamond$

Typische Steuerungsbeschränkungen lauten
$U = \{u \in \mathbb{R}^m : |u| \le \gamma\}$ oder $U = \{u \in \mathbb{R}^m : u_i \ge 0 \text{ für } 1 \le i \le m\}$.

Folgende Punkte interessieren uns nun
1) die Existenz zulässiger Punkte (y,u),
2) die Existenz und Eindeutigkeit von optimalen Lösungen zu (2.17) und

3) notwendige Optimalitätsbedingungen.

Wir werden nicht alle Resultate beweisen. Es werden vor allem die Ideen zur Beantwortung der Punkte 1) - 3) präsentiert.

Sei nun $t_f > 0$ fest gewählt. Dann kann (2.17) als nichtlineares Optimierungsproblem formuliert werden:

$$\min\ J(y,u) \qquad (2.18a)$$

$$\text{u.d.N.}\quad (y,u) \in H^1(0,t_f;\mathbb{R}^n) \times L^2(0,t_f;\mathbb{R}^m), \qquad (2.18b)$$

$$E(y,u) = \begin{pmatrix} \dot y - f(\cdot, y(\cdot), u(\cdot)) \\ \varphi(t_f, y(t_f)) \end{pmatrix} = 0 \in L^2(0,t_f;\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^p, \qquad (2.18c)$$

$$u \in K = \{ u(t) \in U \text{ für fast alle } t \in [0,t_f]\} \qquad (2.18d)$$

Ist U nicht nur abgeschlossen, sondern auch konvex, so ist auch K abgeschlossen und konvex in $L^2(0,t_f;\mathbb{R}^m)$ (Satz von Fischer-Riesz). Damit ist 1) äquivalent mit der Existenz von zulässigen Punkten, die (2.18b) - (2.18d) erfüllen.

Unter geeigneten Voraussetzungen an f existiert genau eine Lösung y von (2.18b) für festes $u \in K$. Diese Lösung bezeichnen wir mit $y(u)$. Dann können wir das reduzierte Problem

$$\min \hat J(u) = J(y(u),u) \quad \text{u.d.N. } u \in K \text{ und } \varphi(t_f, y(u)(t_f)) = 0 \qquad (2.19)$$

betrachten.

Ist K kompakt, so hat jede beschränkte Folge in K eine (stark) konvergente Teilfolge in K. Ferner ist die Lösungsabbildung

$$L^2(0,t_f;\mathbb{R}^m) \ni u \longmapsto (y(u), y(u)(t_f)) \in L^2(0,t_f;\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^p$$

stetig. Ist das Zielfunktional schwach unterhalb-stetig, das heißt,

$$J(\lim_{n\to\infty} y_n, \lim_{n\to\infty} u_n) \le \liminf_{n\to\infty} J(y_n,u_n)$$

für alle (stark) konvergenten Folgen in $\{(y_n,u_n)\}$ in $L^2(0,t_f;\mathbb{R}^n) \times L^2(0,t_f;\mathbb{R}^m)$, dann hat (2.19) eine (globale) Lösung. Der Beweisgang ist wie folgt:

Seien

$$\eta = \inf\{\hat J(u) : u \in K \text{ und } \varphi(t_f, y(u)(t_f)) = 0\}$$

und $\{u_n\}_n$ eine minimierende Folge, d.h., $\lim_{n\to\infty} \hat J(u_n) = \eta$, $\{u_n\}_n \subset K$

und $\varphi(t_f, y(u_n)) = 0$. Da K kompakt ist, existiert eine Teilfolge $\{u_{n_k}\}_k$ von $\{u_n\}$ mit $u_{n_k} \to u^*$ mit $u^* \in K$. Da die Lösungsabbildung stetig ist, folgt $\varphi(t_f, y(u^*)(t_f)) = 0$, das heißt, die Nebenbedingungen werden durch u^* erfüllt und damit ist u^* zulässig. Also folgt wegen

$$\hat{J}(u^*) = \hat{J}(\lim_{k\to\infty} u_{n_k}) \le \liminf_{k\to\infty} \hat{J}(u_{n_k}) = \eta$$

die Beziehung $\hat{J}(u^*) = \eta$. Damit löst u^* das Problem (2.19)

Ist K nicht kompakt, so setzen wir entweder

$$\lim_{|u|\to\infty} \hat{J}(u) = \infty \qquad \text{(radiale Unbeschränktheit)}$$

oder K als beschränkt voraus. Ferner brauchen wir, dass die Lösungsabbildung $u \mapsto (y(u), y(u)(t_f))$ stetig bezüglich der schwachen Topologie in $L^2(0,t_f;\mathbb{R}^m)$ ist und $\hat{J}$ schwach unterhalb-stetig ist. Dann können wir wie im Fall beim kompakten K argumentieren. Der Unterschied ist, dass wir nun nur erhalten, dass eine Teilfolge der minimierenden Folge $\{u_n\}_n$ schwach (und nicht stark) konvergiert.

Im weiteren wollen wir das Pontryagin'sche Maximumprinzip für das Bolzaproblem herleiten. Wir betrachten

$$\min \int_0^{t_f} f^0(t, y(t), u(t))\,dt + g(y(t_f)) \qquad (2.20a)$$

$$\text{u.d.N.} \quad \dot{y}(t) = f(t, y(t), u(t)), \quad t \in (0, t_f], \quad y(0) = y_0, \qquad (2.20b)$$

$$t_f > 0,\ u \in U_{ad} = \{u : [0,t_f] \to \mathbb{R}^m \text{ meßbar} \mid u(t) \in U \text{ für fast alle } t\} \qquad (2.20c)$$

mit $U \subset \mathbb{R}^m$ abgeschlossen und konvex. Mit

$$H(t, y, p, u) = -f^0(t, y, u) + p^T f(t, y, u), \quad t, y, p, u \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times U$$

definieren wir die Hamiltonfunktion für (2.20).

Wir setzen voraus, dass für y_1, y_2 mit $\dot{y}_1 = f(\cdot, y_1, u_1)$, $\dot{y}_2 = f(\cdot, y_2, u_2)$, $u_1, u_2 \in U_{ad}$

$$\max_{t\in[0,T]} |y_1(t) - y_2(t)| \le C\, |u_1 - u_2|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^m)} \text{ ist.}$$

Satz 2.7) Angenommen, dass $(u^*, t_f^*) \in U_{ad} \times \mathbb{R}^+$ optimal für (2.20) ist. Dann gilt die notwendige Optimalitätsbedingung

$$H(t, y^*(t), p(t), u^*(t)) \ge H(t, y^*(t), \lambda(t), u) \quad \forall u \in U,\ t \in [0, t_f^*] \text{ f.ü.}$$

für alle $u \in U$ und für fast alle $t \in (0, t_f^*)$, wobei y^* das Problem (2.20b) mit $u = u^*$ und $t_f = t_f^*$ löst und p die adjungierte Gleichung

$$-\dot{p}(t) = H_y(t, y^*(t), p(t), u^*(t)), \quad t \in (0, t_f^*], \quad p(t_f^*) = -g_y(y^*(t_f^*))$$

löst. Ferner gilt die Transversalitätsbedingung

$$H(t_f^*, y^*(t_f^*), p(t_f^*), u^*(t_f^*)) = 0.$$

Wir benötigen für den Beweis von Satz 2.7 folgende Verallgemeinerung aus der Analysis.

Lemma 2.8. Für eine Funktion $r \in L^1([a,b])$ ist die Integralfunktion

$$R(t) = \int_a^t r(s)\, ds, \quad s \in [a,b]$$

stetig, und es gilt $R'(t) = r(t)$ fast überall.

Bemerkung 2.9. Nach Lemma 2.8 konvergieren für $r \in L^1(a,b)$ die Mittelwerte von r über kleine Intervalle um t fast überall gegen $r(t)$:

$$\lim_{\delta \searrow 0} \frac{1}{\delta} \int_t^{t+\delta} (r(s) - r(t))\, ds = 0 \quad \text{fast überall.}$$

Es gilt sogar die stärkere Aussage

$$\lim_{\delta \searrow 0} \frac{1}{\delta} \int_t^{t+\delta} |r(s) - r(t)|\, ds = 0 \quad \text{fast überall} \tag{2.21}$$

Punkte, in denen (2.21) gilt, heißen Lebesgue-Punkte von r. Insbesondere gilt

$$\int_t^{t+\delta} |r(s) - r(t)|\, ds = o(\delta)$$

und somit

$$\int_t^{t+\delta} |r(s) - r(t)|\, ds \leq C\delta \quad \text{für } \delta \to 0.$$

◊

Beweis. Seien $\delta > 0$, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ und $s \in (0, t_f^*)$. Wir definieren

$$v(t) = \begin{cases} u & \text{auf } [s, s+\delta), \\ u^*(t) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit y bezeichnen wir die Lösung von

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), v(t)), \quad t \in (0, t_f^*], \quad y(0) = y_0$$

für die Steuerung v erklärt. Dann folgt

$$J(v) - J(u^*) = \int_0^{t_f^*} f^0(t, y(t), v(t)) - f^0(t, y^*(t), u^*(t))\,dt \qquad (2.21)$$
$$+ g(y(t_f^*)) - g(y^*(t_f^*))$$
$$= \int_0^{t_f^*} f^0(t, y^*(t), v(t)) + f_y^0(t, y^*(t), v(t))(y(t) - y^*(t))\,dt$$
$$- \int_0^{t_f^*} f^0(t, y^*(t), u^*(t))\,dt + g(y^*(t_f^*)) + g_y(y^*(t_f^*))(y(t_f^*) - y^*(t_f^*))$$
$$- g(y^*(t_f^*)) + \int_0^{t_f^*} r_1(t, y(t) - y^*(t))\,dt + r_2(y(t_f^*) - y^*(t_f^*))$$

mit Funktionen $r_1 : [0, t_f^*] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $r_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die

$$|r_1(t, z)| / |z| \to 0, \quad |r_2(z)| / |z| \to 0 \quad \text{für } |z| \to 0$$

für fast alle $t \in [0, t_f^*]$ erfüllen. Es gelten

$$\frac{d}{dt}(y(t) - y^*(t)) = f(t, y(t), v(t)) - f(t, y^*(t), u^*(t))$$
$$= f_y(t, y^*(t), v(t))(y(t) - y^*(t)) + r_3(t, y(t) - y^*(t))$$
$$+ f(t, y^*(t), v(t)) - f(t, y^*(t), u^*(t))$$

und

$$-\dot p(t) = H_y(t, y^*(t), p(t), v(t)) - (H_y(t, y^*(t), p(t), v(t)) - H_y(t, y^*(t), p(t), u^*(t))),$$

wobei $r_3 : [0, t_f] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Eigenschaft

$$|r_3(t, z)| / |z| \to 0 \quad \text{für } |z| \to 0 \text{ und für fast alle } t \in [0, t_f^*].$$

Also erhalten wir

$$\frac{d}{dt}(p(t)^T(y(t) - y^*(t))) = \dot p(t)^T(y(t) - y^*(t)) + p(t)^T(\dot y(t) - \dot y^*(t)) \qquad (2.22)$$
$$= (H_y(t, y^*(t), p(t), v(t)) - H_y(t, y^*(t), p(t), u^*(t)))^T(y(t) - y^*(t))$$
$$- H_y(t, y^*(t), p(t), v(t))^T(y(t) - y^*(t))$$
$$+ p(t)^T(f(t, y^*(t), v(t)) - f(t, y^*(t), u^*(t)))$$
$$+ p(t)^T(f_y(t, y^*(t), v(t))(y(t) - y^*(t))) + p(t)^T r_3(t, y(t) - y^*(t))$$

Wir verwenden nun die Definition der Hamiltonfunktion, d.h., es gilt

$$H_y(t, y^*(t), p(t), v(t)) = -f_y^0(t, y^*(t), p(t), v(t)) + p(t)^T f_y(t, y^*(t), v(t)).$$

Also bekommen wir

$$-H_y(t, y^*(t), p(t), v(t))^T(y(t) - y^*(t))$$
$$= f_y^0(t, y^*(t), p(t), v(t))^T(y(t) - y^*(t)) - (p(t)^T f_y(t, y^*(t), v(t)))^T(y(t) - y^*(t))$$

Diesen Ausdruck setzen wir in (2.22) ein und erhalten

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)^T(y(t)-y^*(t))\right) = \left(H_y(t,y^*(t),p(t),v(t)) - H_y(t,y^*(t),p(t),u^*(t))\right)^T (y(t)-y^*(t))$$
$$+ f_y^0(t,y^*(t),v(t))^T(y(t)-y^*(t))$$
$$+ p(t)^T\left(f(t,y^*(t),v(t)) - f(t,y^*(t),u^*(t))\right)$$
$$+ p(t)^T r_3(t,y(t)-y^*(t)).$$

Integration von 0 nach t_f^* ergibt:

$$p(t_f^*)^T(y(t_f^*)-y^*(t_f^*)) - p(0)^T \underbrace{(y(0)-y^*(0))}_{=0,\text{ da } y \text{ und } y^* \text{ gleiche Anfangsbed. erfüllen}} \tag{2.23}$$
$$= \int_0^{t_f^*} H_y(t,y^*(t),p(t),v(t)) - H_y(t,y^*(t),p(t),u^*(t))\,(y(t)-y^*(t))\,dt$$
$$+ \int_0^{t_f^*} f_y^0(t,y^*(t),v(t))\,(y(t)-y^*(t))\,dt$$
$$+ \int_0^{t_f^*} p(t)^T\left(f(t,y^*(t),v(t)) - f(t,y^*(t),u^*(t))\right) + p(t)^T r_3(t,y(t)-y^*(t))\,dt.$$

Wir verwenden die Endbedingung $p(t_f^*) = -g_y(y^*(t_f^*))$ und kombinieren (2.21) mit (2.23). Dann folgt, da u^* die optimale Lösung ist, die Abschätzung:

$$0 \geq \hat{J}(u^*) - \hat{J}(v) = \int_0^{t_f^*} f^0(t,y^*(t),u^*(t)) - f^0(t,y^*(t),v(t))\,dt \tag{2.24}$$
$$+ \int_0^{t_f^*}\left(H_y(t,y^*(t),p(t),v(t)) - H_y(t,y^*(t),p(t),u^*(t))\right)(y(t)-y^*(t))\,dt$$
$$- \int_0^{t_f^*} r_1(t,y(t)-y^*(t))\,dt - r_2(y(t_f^*)-y^*(t_f^*))$$
$$+ \int_0^{t_f^*} p(t)^T r_3(t,y(t)-y^*(t))\,dt$$
$$+ \underbrace{g_y(y^*(t_f^*))^T}_{=-p(t_f^*)}(y(t_f)-y^*(t_f)) - g_y(y^*(t_f))^T(y(t_f)-y^*(t_f)) + \int_0^{t_f^*} p(t)^T\left(f(t,y^*(t),v(t)) - f(t,y^*(t),u^*(t))\right)dt$$

Nach Voraussetzung gilt

$$\max_{t\in[0,t_f^*]} |y(t)-y^*(t)| \leq C\,\|v-u^*\|_{L^1(0,t_f^*;\mathbb{R}^m)} = C\int_0^{t_f} |v(t)-u^*(t)|\,dt$$
$$= C\int_s^{s+\delta} |u-u^*(t)|\,dt \leq \tilde{C}\delta.$$

Ist H_y stetig (d.h. f_y^0 und f_y sind stetig), so folgt

$$\left|\int_0^{t_f^*} H_y(t,y^*(t),p(t),v(t)) - H_y(t,y^*(t),p(t),u^*(t))\,(y(t)-y^*(t))\,dt\right|$$
$$\leq \max_{t\in[0,t_f^*]} |y(t)-y^*(t)| \int_0^{t_f^*} \|\underbrace{H_y(t,y^*(t),p(t),v(t))}_{\in\mathbb{R}^n} - H_y(t,y^*(t),p(t),u^*(t))\|\,dt$$
$$\leq \tilde{C}\delta \int_s^{s+\delta} |H_y(t,y^*(t),p(t),u) - H_y(t,y^*(t),p(t),u^*(t))|\,dt,$$

dashöft; ist $t \mapsto H_y(t,y^*(t),p(t),w(t)) \in L^1(0,t_f^*)$ für $w \in L^1(0,t_f^*;\mathbb{R}^m)$

So gilt!

$$0 \le \lim_{\delta \searrow 0} \frac{1}{\delta} \left| \int_0^{t_f^*} \left(H_y(t, y^*(t), p(t), v(t)) - H_y(t, y^*(t), p(t), u^*(t)) \right)(y(t) - y^*(t))\, dt \right|$$
$$\le \tilde{C} \int_s^{s+\delta} |H_y(t, y^*(t), p(t), v(t)) - H_y(t, y^*(t), p(t), u^*(t))|\, dt \to 0, \text{ ⊛}$$

Damit erhalten wir nach Division durch δ aus (2.24):

$$0 \ge \lim_{\delta \searrow 0} \frac{1}{\delta} \int_s^{s+\delta} H(t, y^*(t), p(t), u) - H(t, y^*(t), p(t), u^*(t))\, dt$$
$$= H(s, y^*(s), p(s), u) - H(s, y^*(s), p(s), u^*(s))$$

für $u \in U$ beliebig. Hiebei haben wir genutzt, dass

$$\lim_{\delta \to 0} r_2(y(t_f^*) - y^*(t_f^*)) \cdot \frac{1}{\delta} = 0$$

und analog für r_1 und r_3.

Um die Transversalitätsbedingung zu zeigen, sei für $\delta > 0$

$$v(t) = \begin{cases} u^*(t) & \text{für } t \in [0, t_f^*] \\ u^*(t_f^*) & \text{für } t \in [t_f^*, t_f^* + \delta] \end{cases}$$

Sei wieder y die Lösung von

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), v(t)), \quad t \in (0, t_f^* + \delta], \qquad y(0) = y_0.$$

Dann folgt:

$$0 \ge \hat{J}(v) - \hat{J}(u^*) = \int_{t_f^*}^{t_f^*+\delta} f^0(t, y(t), u^*(t_f))\, dt + g(y(t_f^* + \delta)) - g(y^*(t_f^*))$$

Taylorentwicklung ergibt:

$$g(y(t_f^* + \delta)) = g(y(t_f^*)) + g_y(y(t_f^*))(y(t_f^* + \delta) - y(t_f^*)) + o(|y(t_f^* + \delta) - y^*(t_f^*)|)$$
$$= g(y(t_f^*)) + g_y(y(t_f^*))\, \dot{y}(t_f^*)\delta + o(|\delta|) + o(|y(t_f^* + \delta) - y^*(t_f^*)|)$$

wobei gilt

$$\dot{y}(t_f^*) = f(t_f^*, y^*(t_f^*), u^*(t_f)).$$

Wir dividieren wieder durch δ und verwenden $g_y(y(t_f^*))^T = -p(t_f^*)$

$$0 \ge \lim_{\delta \searrow 0} \frac{1}{\delta} \int_{t_f^*}^{t_f^*+\delta} f^0(t, y(t), u^*(t_f^*))\, dt - p(t_f^*)^T (f(t, y^*(t_f^*), u^*(t_f^*))\delta),$$

das heißt,

$$H(t_f^*, y^*(t_f^*), p(t_f^*), u^*(t_f^*)) \ge 0.$$

Analog folgt mit

Sei $w \in L^1(0, t_f^*)$, $s \in (0, t_f^*)$ und $\delta = t_f - s$. Dann gilt $\lim_{\delta \to 0} \chi_{[s, s+\delta)} u(t) = 0$ f.ü. $t \in (0, t_f)$ und $\chi_{[s,s+\delta)} u \in L^1(0, t_f) \Rightarrow \int_s^{s+\delta} |u(t)|\, dt \to 0$, $\delta \to 0$

⊛ $\frac{1}{\delta} \int_s^{s+\delta} r(t)\, dt \to r(s)$ an Leb. Punkten, denn $\frac{1}{\delta} \int_s^{s+\delta} r(t)\, dt - r(s) = \frac{1}{\delta} \int_s^{s+\delta} r(t) - r(s)\, dt \to 0$

$$v(t) = \begin{cases} u^*(t) & \text{für } t \in [0, t_f^* - \delta] \\ 0 & \text{für } t \in (t_f^* - \delta, t_f^*] \end{cases}$$

die Ungleichung

$$H(t_f^*, y^*(t_f^*), p(t_f^*), u^*(t_f^*)) \leq 0$$

und damit die Behauptung □

Wir betrachten das folgende Optimalsteuerproblem

$$\min \int_0^{t_f} f_1^0(t, y(t), u(t))\, dt \qquad (2.25a)$$

$$\text{u.d.N.} \quad g_1(y(t_f)) = 0, \; g_2(y(t_f)) \leq 0 \qquad (2.25b)$$

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), u(t)), \; y(0) = y^0 \qquad (2.26c)$$

$$T = t_f \geq 0, \; u \in U_{ad}$$

Die Hamiltonfunktion sei definiert durch

$$H(t, y, p, u) := -p^0 f^0(t, y, u) - p^T f(t, y, u)$$

for $t \in (0, t_f), y \in \mathbb{R}^n, p \in \mathbb{R}^n, u \in U_{ad}$.

Satz 2.10. Angenommen, (u^*, t_f^*) ist optimal für (2.25). Dann existiert für alle $t \in [0, T]$ ein nichttriviales $(p^0, p(t))$, $p^0 \in \mathbb{R}^+$, $p \in H^1(0, t_f^*; \mathbb{R}^n)$, mit

$$H(s, y^*(s), p(s), u^*(s)) \geq H(s, y^*(s), p(s), u) \quad \text{für alle } u \in U, \; t \in (0, t_f^*) \text{ f.ü.}$$

und

$$H(t_f^*, y^*(t_f^*), p(t_f^*), u^*(t_f^*)) = 0,$$

wobei $p \in H^1(0, t_f^*; \mathbb{R}^n)$ und $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, $\mu_2 \geq 0$, das Anfangswertproblem

$$-\dot{p}(t) = H_y(t, y^*(t), p(t), u^*(t)), \quad t \in [0, t_f^*), \quad p(t_f^*) = \underbrace{g_y(y^*(t_f^*))}_{} {}^T \mu$$

löst.

$$= \begin{pmatrix} g_{1y}(y^*(t_f^*)) \\ g_{2y}(y^*(t_f^*)) \end{pmatrix} \quad n \text{ Spalten}$$

Beispiel 2.11 Seien y_1 die Produktionsrate, y_2 die Rate für die Wiederveranlagung des Gewinns und y_3 die Verbrauchsrate. Es gelte

$$\dot{y}_1(t) = y_2(t), \quad t > 0, \quad y_1(0) = c > 0.$$

Wir nehmen an, dass $y_1 = y_2 + y_3$ und $y_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$, gelten.

Die Steuerung sei als $u(t) = y_2(t) / y_1(t)$ gewählt.

Die gesamte Verbrauch Φ ist

$$\Phi = \int_0^T y_3(t)\,dt \quad , T \geq 1$$

Setzen wir $y = y_1$, so erhalten wir das Problem

$$\min J(y,u) = \int_0^T (u(t)-1)\,y(t)\,dt$$

$$\text{u.d.N.}\quad \dot y(t) = u(t)y(t),\ t \in [0,T],\ y(0) = c$$

$$u(t) \in U = [0,1]$$

Wegen $c>0$ und $u \geq 0$ erhalten wir $y>0$. Die Hamiltonfunktion ist

$$H(t,y,p,u) = -p^0 f^0(t,y,u) + p^T f(t,y,u)$$

$$= p^0(1-u)y + p^T uy \quad , y,u,p \in \mathbb{R},\ p^0 \in \mathbb{R}^+$$

Da es keine Endbedingungen gibt, ist $p(t_f^*) = 0$. Da $(p^0, p(t))$ auf $[0,t_f^*]$ nichttrivial sein muss, folgt $p^0 > 0$. Wir setzen $p^0 = 1$.

Mit dem Maximumprinzip folgt

$$(1-u^*(t))\,y^*(t) + p(t)\,u^*(t)\,y^*(t) \geq (1-u)\,y^*(t) + p(t)\,u\,y^*(t)$$

für alle $u \in [0,1]$, also

$$(p(t)-1)\,u^*(t)\,y^*(t) \geq (p(t)-1)\,u\,y^*(t)$$

Wegen $y > 0$ in $[0,T]$ folgt

$$(p(t)-1)\,u^*(t) \geq (p(t)-1)\,u.$$

Damit legt das Vorzeichen von $p(t)-1$ u^* fest:

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & \text{sofern } p(t)-1 > 0 \\ 0, & \text{sofern } p(t)-1 \leq 0 \end{cases}$$

s.Ü. Die adjungierte Gleichung lautet

$$\dot p(t) = (u^*(t)-1) - u^*(t)\,p(t) = (1-p(t))\,u^*(t) - 1$$

$$p(T) = 0$$

$\Diamond$

Im weiteren wollen wir die notwendigen Optimalitätsbedingungen unter Verwendung der Lagrangefunktion herleiten. Sei t_f fest gewählt. Unter Verwendung der Abbildung

$$E = \begin{pmatrix} \dot y - f(\cdot, y(\cdot), u(\cdot)) \\ y(0) - y^0 \\ \varphi(y(t_f)) \end{pmatrix}$$

definieren wir die Hilberträume

$$X = H^1(0,t_f;\mathbb{R}^n)\times L^2(0,t_f;\mathbb{R}^m),$$
$$Y = L^2(0,t_f;\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^q.$$

Dann gilt $E: X\to Y$. Wir führen die Lagrangefunktion

$$L: X\times Y\to\mathbb{R}$$

durch

$$\begin{aligned} L(y,u,p,p^0,\mu) &= J(y,u) + \langle E(y,u),(p,p^0,\mu)\rangle_Y \\ &= J(y,u) + \int_0^{t_f}(\dot y - f(\cdot,y(\cdot),u(\cdot)))^T p\,dt \\ &\quad + \langle y(0)-y^0,p^0\rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle \varphi(y(t_f)),\mu\rangle_{\mathbb{R}^q}\end{aligned}$$

für $(y,u)\in X$, $(p,p^0,\mu)\in Y$.

<u>Satz 2.12.</u> Angenommen, (y^*,u^*) löst das Problem

$$\min J(y,u) \quad \text{u.d.N.} \quad E(y,u)=0.$$

Der Operator $E'(y^*,u^*): X\to Y$ sei surjektiv. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Lagrange-Multiplikator $(p,p^0,\mu)\in Y$ mit

(2.26a) $D_y L(y^*,u^*,p,p^0,\mu)h = D_y J(y^*,u^*)h + \langle D_y E(y^*,u^*)h,(p,p^0,\mu)\rangle_Y = 0$

für alle $h\in H^1(0,t_f;\mathbb{R}^n)$. Ferner gilt

(2.26b) $D_u L(y^*,u^*,p,p^0,\mu)v = D_u J(y^*,u^*)v + \langle D_u E(y^*,u^*)v,(p,p^0,\mu)\rangle_Y = 0$

für alle $u\in L^2(0,t_f;\mathbb{R}^m)$.

Wir wollen (2.26a) genauer betrachten. Zunächst gilt

$$D_y E'(y,u)h = \begin{pmatrix} \dot h - f_y(\cdot,y(\cdot),u(\cdot))h \\ h(0) \\ \varphi_y(y(t_f))\,h(t_f)\end{pmatrix}\in Y.$$

Daher folgt aus (2.26a)

$$\int_0^{t_f}(\dot h(t) - f_y(t,y^*(t),u^*(t))h)^T p(t)\,dt + h(0)^T p^0 + (\varphi_y(y^*(t_f))h(t_f))^T\mu = -D_y J(y,u)h.$$

Gilt

$$J(y,u) = \int_0^{t_f} f^0(t,y(t),u(t))\,dt,$$

so erhalten wir

$$\int_0^{t_f} (\dot h(t) - f_y(t,y^*(t),u^*(t))h)^T p(t)\,dt + h(0)^T p^0 + (\varphi_y(y^*(t_f))\,h(t_f))^T q \qquad (2.27)$$
$$= -\int_0^{t_f} f_y^0(t,y^*(t),u^*(t))\,h(t)\,dt$$

für alle $h \in H^1(0,t_f;\mathbb{R}^n)$. Insbesondere folgt aus (2.27) für $h \in H_0^1(0,t_f;\mathbb{R}^n)$ mit

$$H_0^1(0,t_f;\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in H^1(0,t_f;\mathbb{R}^n) \mid \varphi(0) = \varphi(t_f) = 0\}$$

die Beziehung

$$\int_0^{t_f} \dot h(t)^T p(t)\,dt = \int_0^{t_f} (f_y(t,y^*(t),u^*(t))^T p(t) - \underbrace{f_y^0(t,y^*(t),u^*(t))^T}_{=\nabla_y f^0(t,y^*(t),u^*(t))})^T h(t)\,dt.$$

Partielle Integration liefert wegen $h(0) = h(t_f) = 0$ die Gleichung

$$-\dot p(t) = \underbrace{-f_y^0(t,y^*(t),u^*(t))^T + f_y(t,y^*(t),u^*(t))^T p(t)}_{} \in \mathbb{R}^n, \quad t \in (0,t_f) \text{ f.ü.} \qquad (2.28a)$$
$$= (H_y(t,y^*(t),p(t),u^*(t)))^T = \nabla_y H(t,y^*(t),p^*(t),u^*(t))$$

mit $H(t,y,p,u) = -f^0(t,y,u) + p^T f(t,y,u)$. Ferner folgt nun durch Einsetzen von (2.28a) in (2.27) die Beziehung

$$p(t_f)^T h(t_f) - p(0)^T h(0) + h(0)^T p^0 + (\varphi_y(y^*(t_f))\,h(t_f))^T q = 0$$

für alle $h \in H^1(0,t_f;\mathbb{R}^n)$. Wählen wir wieder Richtungen h mit $h(0) = 0$, aber $h(t_f) \neq 0$, so folgt

$$p(t_f) = \varphi_y(y^*(t_f))^T \mu \in \mathbb{R}^n \qquad (2.28b)$$

Ferner ergibt sich bei der Wahl $h \in H^1(0,t_f;\mathbb{R}^n)$ mit $h(t_f) = 0$, aber $h(0) \neq 0$ die Gleichung

$$p^0 = p(0) \in \mathbb{R}^n. \qquad (2.28c)$$

Nun kommen wir zur Gleichung (2.26b). Es ergibt sich

$$\int_0^{t_f} (f_u^0(t,y^*(t),u^*(t))\,v(t) - f_u(t,y^*(t),u^*(t))\,v(t))^T p(t)\,dt = 0$$

für alle $v \in L^2(0,t_f;\mathbb{R}^m)$. Also erhalten wir

$$-f_u^0(t,y^*(t),u^*(t)) + p(t)^T f_u(t,y^*(t),u^*(t)) = H_u(t,y^*(t),p(t),u^*(t)) = 0 \qquad (2.29).$$

Damit ergibt sich für (y^*,u^*) mit den Lagrange-Multiplikatoren (p,p^0,q) folgendes Optimalitätssystem erster Ordnung

$$\dot y^*(t) = f(t,y^*(t),u^*(t)), \quad t \in (0,t_f] \text{ f.ü.}, \qquad y^*(0) = y_0 \qquad \text{(Zustandsgl.)}$$
$$-\dot p(t) = \nabla_y H(t,y^*(t),p(t),u^*(t)), \quad t \in [0,t_f) \text{ f.ü.}, \quad p(t_f) = \varphi_y(y^*(t_f))\,\mu$$
$$\varphi(y^*(t_f)) = 0$$

$p^0 = p(0)$

$H_u(t, y^*(t), p(t), u^*(t)) = 0\,, \quad t \in (0, t_f)$ f.ü.

Das ist ein nichtlineares System für die Unbekannten (y^*, u^*) und (p, p^0, μ).

<u>Beispiel 2.13.</u> Wir betrachten das Problem

$$\min J(y,u) = \frac{1}{2}\int_0^{t_f} y(t)^T Q y(t) + u(t)^T R u(t)\, dt + y(t_f)^T G y(t_f)$$

unter der Nebenbedingung

$$\dot y(t) = Ay(t) + Bu(t) + f(t)\,, \quad t \in (0, t_f]\,; \quad y(0) = y_0$$

mit $f \in L^2(0, t_f; \mathbb{R}^n)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $Q, G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (beide symmetrisch, positiv-semidefinit), $y_0 \in \mathbb{R}^n$ und $R \in \mathbb{R}^{m\times m}$ (symmetrisch, positiv definit).

Die Hamiltonfunktion lautet mit $t \in [0, t_f]$

$$\begin{aligned} H(t, y, p, u) &= -f^0(t, y, u) + p^T f(t, y, u) \\ &= -\frac{1}{2} y^T Q y - \frac{1}{2} u^T R u + p^T (Ay + Bu + f(t))\,, \quad y, p \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

Also folgt die adjungierte Gleichung

$$-\dot p(t) = \nabla_y H(t, y^*(t), p(t), u^*(t)) = -Qy^*(t) + A^T p(t)\,, \quad t \in [0, t_f)\,,$$

$$p(t_f) = Gy^*(t_f).$$

Aus $H_u(t, y^*(t), p(t), u^*(t)) = 0$ folgt die Beziehung

$$-Ru^*(t) + B^T p(t) = 0 \quad \text{in } [0, t_f]\,,$$

d.h., $u^*(t) = R^{-1} B^T p(t)$.

2.4 Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung

Wir betrachten das Problem

$$\min J(s, y_s^0; u) = \int_s^{t_f} f^0(t, y(t), u(t))\, dt + g(y(t_f)) \qquad (2.30)$$

unter der Nebenbedingung

$$\dot y(t) = f(t, y(t), u(t))\,, \quad t \in (s, t_f]\,, \quad y(s) = y_s^0\,, \quad u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m\,, \qquad (2.31)$$

wobei U abgeschlossen und konvex ist.

Unter geeigneten Voraussetzungen an f können wir garantieren, dass (2.31) eine eindeutige Lösung $y \in H^1(s, t_f; \mathbb{R}^n) \subset C([s, t_f]; \mathbb{R}^n)$ besitzt. Diese Lösung so folgende Eigenschaften haben:

- y hängt stetig von $s \in [0,t_f]$ und $y_0^0 \in \mathbb{R}^n$ ab;
- y hängt stetig von $u \in L^1(0,t_f;\mathbb{R}^m)$ ab.

Mit den Argumenten aus Abschnitt 2.3 lässt sich zeigen, dass – unter geeigneten Voraussetzungen an f^0 und g (2.30)–(2.31) eine optimale Lösung (y^*,u^*) besitzt, und zwar für alle $(s, y_0^0) \in [0,t_f] \times \mathbb{R}^n$.

Wir definieren die minimale Wertefunktion

$$V(s,y^0) = \min_{u \in K} J(s,y^0;u),$$

wobei

$$K = \{u \in L^2(0,t_f;\mathbb{R}^m) \mid u(t) \in U \text{ für fast alle } t \in [0,t_f]\}$$

gilt. Die Funktion genügt dem Optimalitätsprinzip

$$\min\left\{\int_s^\sigma f^0(t,y(t),u(t))\,dt + V(\sigma,y(\sigma)) : u \in U \text{ in } [s,\sigma] \text{ fast überall}\right\} = V(s,y^0). \tag{2.32}$$

Das lässt sich wie folgt einsehen: Für $\sigma \in [s,t_f]$ folgt

$$J(s,y^0;u) = \int_s^\sigma f^0(t,y(t),u(t))\,dt + J(\sigma,y(\sigma);u).$$

Das ergibt

$$\int_s^\sigma f^0(t,y(t),u(t))\,dt + V(\sigma,y(\sigma)) \le J(s,y^0;u) \tag{2.33}$$

für alle $u \in K$. Also erhalten wir

$$V(s,y^0) \le \min\left\{\int_s^\sigma f^0(t,y(t),u(t))\,dt + V(\sigma,y(\sigma)) : u \in U \text{ in } [s,\sigma] \text{ f.ü.}\right\} \le V(s,y^0),$$

was (2.32) ergibt. Dabei haben wir für die erste Ungleichung genutzt, dass die Steuerung, die den mittleren Term minimiert, auch in der Menge der zulässigen Steuerungen enthalten ist, über die bei der Berechnung von $V(s,y^0)$ minimiert wird. Die zweite Ungleichung folgt hingegen aus (2.33).

Ist V stetig differenzierbar, so genügt V der Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) Gleichung

$$V_t(s,y^0) + \min_{u \in U}\{f(s,y;u)^T \cdot \nabla_y V(s,y^0) + f^0(s,y;u)\}, \quad s \in [0,t_f], \; y \in \mathbb{R}^n \tag{2.34}$$

Gleichung (2.34) folgt aus dem Optimalitätsprinzip (2.32). Sei $\hat{u} \in K$ von der Form

$$\hat{u} = \begin{cases} u & \text{auf } (s,\sigma), \\ \tilde{u} & \text{auf } (\sigma, t_f), \end{cases}$$

wobei $u(t) \in U$ auf (s,σ) gilt und $\tilde{u}$ die Lösung von

$$\min\{J(\sigma, y(\sigma); v) : v \in L^1(\sigma, t_f; \mathbb{R}^m) \text{ mit } v \in U \text{ auf } [\sigma, t_f]\}$$

ist. Wegen

$$J(s, y^0; u) = \int_s^\sigma f^0(t, y(t), u(t))\,dt + J(\sigma, y(\sigma); u)$$

folgt

$$J(s, y^0; \hat{u}) = \int_s^\sigma f^0(t, y(t), u(t))\,dt + V(\sigma, y(\sigma)), \quad \sigma \in (s, t_f].$$

Setzen wir $u(t) = u^*(t)$ für $t \in [s,\sigma]$, so folgt aus (2.32), dass $\tilde{u} = u^*$ auf $[\sigma, t_f]$ das Zielfunktional $J(\sigma, y^*(\sigma), v)$ minimiert auf $[\sigma, t_f]$.

Ferner gilt

$$V(s, y^0) = \int_s^\sigma f^0(t, y^*(t), u^*(t))\,dt + V(\sigma, y^*(\sigma)). \tag{2.35}$$

Da V stetig differenzierbar ist, folgt

$$\frac{d}{dt} V(t, y(t)) = D_t V(t, y(t)) + D_y V(t, y(t))\,\dot{y}(t) = V_t(t, y(t)) + f(t, y(t), u(t))^T \nabla_y V(t, y(t)).$$

Daher gilt

$$V(\sigma, y(\sigma)) = V(s, y^0) + \int_s^\sigma V_t(t, y(t)) + f(t, y(t), u(t))^T \nabla_y V(t, y(t))\,dt.$$

Offenbar gelten $V(s, y^0) \le J(s, y^0; \hat{u})$ und $V(\sigma, y(\sigma)) \le J(\sigma, y(\sigma); \hat{u})$. Also

$$\begin{aligned} 0 &= \int_s^\sigma V_t(t, y(t)) + f(t, y(t), u(t))^T \nabla_y V(t, y(t))\,dt + V(s, y^0) - V(\sigma, y(\sigma)) \\ &\le \int_s^\sigma V_t(t, y(t)) + f(t, y(t), u(t))^T \nabla_y V(t, y(t))\,dt + \int_s^{t_f} f^0(t, y(t), \hat{u}(t))\,dt \\ &\quad - \int_\sigma^{t_f} f^0(t, y(t), \hat{u}(t))\,dt = \int_s^\sigma V_t(t, y(t)) + f(t, y(t), u(t))^T \nabla_y V(t, y(t)) \\ &\qquad + f^0(t, y(t), u(t))\,dt. \end{aligned}$$

Gilt $u = u^*$ auf $[s,\sigma]$, so ist das Ungleichheitszeichen durch ein Gleichheitszeichen zu ersetzen. Es folgt

$$\lim_{\sigma \to s^+} \frac{1}{\sigma - s} \int_s^\sigma V_t(t, y(t)) + f(t, y(t), u(t))^T \nabla_y V(t, y(t)) + f^0(t, y(t), u(t))\,dt$$
$$= V_t(s, y^0) + f(s, y^0, u(s))^T \nabla_y V(s, y^0) + f^0(s, y^0, u(s)) \ge 0$$

for all $u(s) = u \in U$ and

$$V_t(s, y^0) + f(s, y^0, u^*(s))^T \nabla_y (s, y^0) + f^0(s, y^0, u^*(s)) = 0$$

was (2.34) entspricht. Wir erhalten das folgende Resultat:

Satz 2.14. Sei V die Lösung der Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung (2.34), so dass $V \in C^1((0,t_f) \times \mathbb{R}^n)$ gilt. Dann folgen:

a) $V(s,y^0) \le J(s,y^0;u)$ für jede zulässige Steuerung u.

b) Ist $u^*(t) = \mu(t,y^0) \in \mathcal{U}$ die eindeutige Lösung von

$$f(t,y^0,u^*(t))^T \nabla_y V(t,y^0) + f^0(t,y^0,u^*(t)) = \min_{u \in \mathcal{U}} \{ f(t,y^0,u)^T \nabla_y V(t,y^0) + f^0(t,y^0,u) \} \quad (2.36)$$

und hat das Anfangswertproblem

$$\dot y(t) = f(t, y(t), \mu(t, y(t))), \quad t \in (s,t_f], \quad y(s) = y^0$$

eine Lösung $y^* \in C^1(0,t_f;\mathbb{R}^n)$ für jedes $(s,y^0) \in [0,t_f] \times \mathbb{R}^n$, dann ist das Rückkopplungsgesetz

$$u^*(t) = \mu(t, y^*(t))$$

optimal, d.h.,

$$V(s,y^0) = J(s,y^0;u^*) \quad \text{für alle } (s,y^0) \in [0,t_f] \times \mathbb{R}^n.$$

Beweis. Für jedes $u \in \{ v \in L^2(0,t_f;\mathbb{R}^m) \mid v(t) \in \mathcal{U} \text{ für fast alle } t \}$ gilt

$$\frac{d}{dt}(V(t,y(t))) = V_t(t,y(t)) + f(t,y(t),u(t))^T \nabla V_y(t,y(t)).$$

Ferner haben wir gezeigt, dass

$$V_t(t,y^0) + f(t,y^0,u)^T \nabla_y V(t,y^0) + f^0(t,y^0;u) \ge 0$$

für alle $(s,y^0) \in [0,t_f] \times \mathbb{R}^n$. Also erhalten wir

$$\frac{d}{dt} V(t,y(t)) \ge -f^0(t,y(t),u(t)).$$

Das bedeutet

$$V(t_f,y(t_f)) - V(s,y^0) = \int_s^{t_f} \frac{d}{dt}(V(t,y(t)))\,dt$$
$$\ge -\int_s^{t_f} f^0(t,y(t),u(t))\,dt,$$

woraus

$$V(s,y^0) \le \int_s^{t_f} f^0(t,y(t),u(t))\,dt + g(y(t_f)) = J(s,y^0;u)$$

folgt für alle zulässigen Steuerungen.

Nimmt $u^*(t) \in \mathcal{U}$ zusammen mit $y^0 = y^*(t)$ das Minimum in (2.35) an, so gilt

$$\frac{d}{dt}(V(t, y^*(t))) = V_t(t, y^*(t)) + f(t, y^*(t), u^*(t))^T \nabla_y V(t, y^*(t)) = -f_0(t, y^*(t), u^*(t))$$

Daher ergibt sich

$$V(s, y^0) = \int_s^{t_f} f^0(t, y^*(t), u^*(t))\,dt + g(y^*(t_f)) = J(s, y^0; u^*),$$

was zu zeigen war. $\square$

Wir wollen nun die Relation zum Maximumprinzip diskutieren.
Wir definieren die Hamiltonfunktion

$$\hat{H}(t, y, u, p) = -f^0(t, y, u) - p^T f(t, y, u)$$
$$= -f^0(t, y, u) - \langle f(t, y, u), p \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

mit $t \in [0, t_f]$, $y, p \in \mathbb{R}^n$ und $u \in U \subset \mathbb{R}^m$. Wir sehen voraus, dass es ein eindeutig bestimmtes Element $u^* = \mu(t, y, p) \in \mathcal{U}$ gibt, welches $\hat{H}(t, y, u, p)$ über $\mathcal{U}$ minimiert. Hierbei löst y die entsprechende Zustandsgleichung mit $u = u^*$ und p die adjungierte Gleichung mit $y = y^*$ und $u = u^*$. Ferner sehen wir voraus, dass μ lokal Lipschitz-stetig ist.
Wir definieren

$$H(t, y, p) = \max_{u \in \mathcal{U}} \hat{H}(t, y, u, p).$$

Dann lautet (2.34)

$$V_t(t, y^0) - H(t, y^0, \nabla_y V(t, y^0)) = 0.$$

Ist $V \in C^{1,2}((0, t_f) \times \mathbb{R}^n)$, erhalten wir für $p(t) = \nabla_y V(t, y^*(t))$ die Beziehung

$$\dot{p}(t) = \hat{H}_y(t, y^*(t), u^*(t), p(t))^T, p(t_f)), \quad t \in [0, t_f),$$
$$p(t_f) = g_y(y^*(t_f))$$

und $u^*(t) = \mu(t, y^*(t), p(t))$ ist eine optimale Steuerung. Es gilt nämlich

$$\frac{d}{dt} \nabla_y V(t, y^*(t)) = \frac{\partial}{\partial t} \nabla_y V(t, y^*(t)) + \nabla_{yy} V(t, y^*(t))\, \dot{y}^*(t)$$
$$= \nabla_y V_t(t, y^*(t)) + \nabla_{yy} V(t, y^*(t))\, f(t, y^*(t), u^*(t))$$
$$= \nabla_y H(t, y^*(t), \nabla_y V(t, y^*(t))) + \nabla_{yy} V(t, y^*(t))\, \nabla_p H(t, y^*(t), \nabla_y V(t, y^*(t))$$

$$+ \nabla_{yy} V(t, y^*(t))\, f(t, y^*(t), u^*(t))$$
$$= -f_y(t, y^*(t), u^*(t))^T p(t) - f_y^0(t, y^*(t), u^*(t))^T$$
$$- \nabla_{yy} V(t, y^*(t)) \left(f(t, y^*(t), u^*(t)) - f(t, y^*(t), u^*(t)) \right)$$
$$= \hat{H}(t, y^*(t), u^*(t), \nabla_y V(t, y^*(t))).$$

Insbesondere gilt:

$$\frac{d}{dt} V(t, y^*(t)) = V_t(t, y^*(t)) + \nabla_y V(t, y^*(t))\, f(t, y^*(t), \mu(t, y^*(t), p(t)))$$
$$= H(t, y^*(t), \nabla_y V(t, y^*(t))) + \nabla_y V(t, y^*(t))\, f(t, y^*(t), \mu(t, y^*(t), p(t)))$$
$$= -f^0(t, y^*(t), \mu(t, y^*(t), p(t))) - p(t)^T f(t, y^*(t), \mu(t, y^*(t), p(t)))$$
$$+ p(t)^T f(t, y^*(t), \mu(t, y^*(t), p(t)))$$
$$= -f^0(t, y^*(t), \mu(t, y^*(t), p(t)))$$

Wir erhalten also als notwendige Optimalitätsbedingungen:

$$\frac{d}{dt} y^*(t) = f(t, y^*(t), \mu(t, y^*(t), p(t))),$$
$$\frac{d}{dt} p(t) = \nabla_y H(t, y^*(t), p(t)),$$
$$\frac{d}{dt} V(t, y^*(t)) = -f^0(t, y^*(t), \mu(t, y^*(t), p(t))).$$

2.5 LQR Theorie und Riccatigleichungen

Wir betrachten das Problem

$$\min J(y, u) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} y(t)^T Q y(t) + u(t)^T R u(t)\, dt + y(t_f)^T G y(t_f) \qquad (2.36a)$$

unter der Nebenbedingung

$$\dot{y}(t) = A y(t) + B u(t) + f(t), \quad t \in (0, t_f], \qquad y(0) = y^0 \qquad (2.36b)$$

mit $f \in L^2(0, t_f; \mathbb{R}^n)$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $Q, G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (beide symmetrisch, positiv semidefinit), $y^0 \in \mathbb{R}^n$ und $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ (symmetrisch, positiv definit).

Die adjungierte Gleichung zu (2.36) lautet

$$\dot{p}(t) = -A^T p - Q y(t), \quad t \in [0, t_f), \quad p(t_f) = G y(t_f). \qquad (2.37)$$

Da die Gleichung (2.37) affin ist, machen wir für p den Ansatz

$$p(t) = P(t) y(t) + v(t) \qquad (2.38)$$

Wir setzen (2.38) in (2.37) ein. Dann folgt

$$\dot{P}(t) y(t) + P(t) \dot{y}(t) + \dot{v}(t) = -A^T P(t) y(t) - A^T v(t) - Q y(t)$$

Verwenden wir (2.36 b), so erhalten wir mit $u(t) = -R^{-1}B^T(P(t)y(t) + v(t))$

$$\left(\dot{P}(t) + A^T P(t) + P(t)A - P(t)BR^{-1}B^T P(t) + Q\right)y(t)$$
$$+ \dot{v}(t) + (A - BR^{-1}B^T P(t))^T v(t) + P(t)f(t) = 0.$$

Die Gleichung ist erfüllt, wenn

$$\dot{P}(t) + A^T P(t) + P(t)A - P(t)BR^{-1}B^T P(t) + Q = 0 \quad , t \in [0, t_f) \quad (2.39)$$

und

$$\dot{v}(t) + A - BR^{-1}B^T P(t). \quad (2.40)$$

Wegen $G y(t_f) = p(t_f) = P(t_f)y(t_f) + v(t_f)$ fordern wir

$$P(t_f) = G y(t_f) \quad \text{und} \quad v(t_f) = 0.$$

Nun wollen wir das Problem

$$J(y^0; u) = \frac{1}{2}\int_0^\infty y(t)^T Q y(t) + u(t)^T R u(t)\, dt \quad (2.41a)$$

und der Nebenbedingung

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t), \quad t \in (0, t_f], \quad y(0) = y^0. \quad (2.41b)$$

Wir nehmen an, dass für alle $y^0 \in \mathbb{R}^n$ (2.41) eine zulässige Steuerung besitzt (d.h., das uneigentliche Integral in (2.41a) existiert). Dann kann man zeigen, dass die optimale Steuerung durch das Feedback-Gesetz

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T P_\infty y^*(t),$$

wobei P_∞ symmetrisch und nichtnegativ ist. Eine hinreichende Bedingung dafür, dass das Zielfunktional endlich ist, ist die Bedingung, dass (A, B) stabilisierbar ist, das heißt, es gibt eine Matrix $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, so dass $A - BK$ asymptotisch stabil ist.

<u>Satz 2.15</u> (LQR) a) Es existiere für jedes $y^0 \in \mathbb{R}^n$ mindestens eine zulässige Steuerung, so dass das Integral in (2.41a) endlich ist. Für jedes $t_f > 0$ bezeichne P_{t_f} die Lösung von (2.39) mit $P_{t_f}(t_f) = 0$. Dann konvergiert $P_{t_f}(0)$ monoton gegen eine nichtnegative, symmetrische Matrix P_∞ für $t_f \to \infty$. Insbesondere genügt P_∞ der algebraischen Riccatigleichung

$$A^T P_\infty + P_\infty A - P_\infty BR^{-1}B^T P_\infty + Q = 0 \quad (2.42)$$

Die Steuerung

$$u^*(t) = -R^{-1} B^T P_\infty y^*(t),$$

ist die eindeutige Lösung von (2.41) und

$$J(y^0; u^*) = \frac{1}{2} (y^0)^T P_\infty y^0 = \min_{u \in L^2(0,\infty;\mathbb{R}^m)} J(y^0; u).$$

Existiert auf der anderen Seite eine nicht negative, positive Matrix P, die (2.42) löst, dann gibt es für alle $y^0 \in \mathbb{R}^n$ eine zulässige Steuerung u, so dass $J(y^0; u)$ endlich ist und $P_\infty \leq P$ gilt.

2) Gibt es eine Matrix H, so dass $A - H Q$ asymptotisch stabil ist, dann ist die closed-loop-Matrix $A - B R^{-1} B^T P_\infty$ asymptotisch stabil und P_∞ ist die eindeutig bestimmte symmetrische Lösung zu (2.42).