Universität Konstanz *WS 11/12*
Fachbereich Mathematik und Statistik
S. Volkwein, O. Lass

Übungen zu **Modellreduktion mit Proper Orthogonal Decomposition**

http://www.math.uni-konstanz.de/numerik/personen/volkwein/teaching/

Blatt 2 **Abgabe: 18.11.2011, 10:00 Uhr**

Aufgabe 4 (Hausaufgabe) (2 Punkte)

Zeige, dass die Aussage argmax($\mathbf{P}^\ell$)$= \sum_{i=1}^{\ell} \sigma_i^2$ von Satz 1.1 gilt.

Aufgabe 5

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m > n$ eine Matrix mit unabhängigen Spalten und $U^\top AV = \Sigma$ eine Singulärwertzerlegung von A mit Singulärwerten $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_n > 0$. Die Spalten der Matrizen U und V werden mit u_i bzw. v_i notiert. Zeige, dass folgende Aussagen gelten:

a) $Av_i = \sigma_i u_i, \quad A^\top u_i = \sigma_i v_i, \quad i = 1, \ldots, n.$

b) $\|A\|_2 = \sigma_1$.

c) Die Matrix $A^\top A$ ist symmetrisch positiv definit.

d) Die strikt positiven Singulärwerte sind gerade die Wurzeln der strikt positiven Eigenwerte von $A^\top A$:

$$\{\sigma_i \,|\, i = 1, \ldots, n\} = \{\sqrt{\lambda_i(A^\top A)} \,|\, i = 1; \ldots, n\},$$

wobei $\lambda_i(A^\top A)$ die Eigenwerte von $A^\top A$ sind.

Aufgabe 6

a) Angenommen die Matrix $A = U\Sigma V^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist invertierbar. Gib die Singulärwertzerlegung von A^{-1} an.

b) Berechne die Singulärwertzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$