Universität Konstanz *WS 11/12*
Fachbereich Mathematik und Statistik
S. Volkwein, O. Lass

Übungen zu **Modellreduktion mit Proper Orthogonal Decomposition**

http://www.math.uni-konstanz.de/numerik/personen/volkwein/teaching/

Blatt 3 **Abgabe: 02.12.2011, 10:00 Uhr**

Aufgabe 7 (Hausaufgabe) (2 Punkte)

Zeige, dass $u_i = W^{-1/2}\bar{u}_i$, $i = 1, \ldots, \ell$, das Problem $(\mathbf{P}_W^\ell)$ löst, wobei die Matrix W und die Vektoren $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m$ durch Satz 1.8 gegeben sind.

Aufgabe 8

Gegeben eine symmetrische und positiv definite Matrix $W \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Seien $\eta_1 \geq \cdots \geq \eta_m > 0$ die Eigenwerte von W und $W = Q\mathrm{diag}(\eta_1, \ldots, \eta_m)Q^\top$ die Eigenwertzerlegung von W. Wir definieren

$$W^\alpha = Q\mathrm{diag}(\eta_1^\alpha, \ldots, \eta_m^\alpha)Q^\top \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Zeige, dass $(W^\alpha)^{-1}$ existiert und $(W^\alpha)^{-1} = W^{-\alpha}$. Weiter zeige, dass $W^{\alpha+\beta} = W^\alpha W^\beta$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 9

Wir betrachten das L^2 innere Produkt

$$\langle u, v\rangle_{L^2(\Omega} = \int_\Omega uv \,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Im diskreten Fall kann dieses innere Produkt geschrieben werden mit einer symmetrischen und positiv definiten Gewichtungsmatrix $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ als

$$\langle u, v\rangle_W = u^\top W v \quad \text{für } u, v \in \mathbb{R}^n.$$

Wir betrachten hier Gewichte die durch die Trapezregel gegeben werden. Wie sieht die Matrix W aus für

a) das eindimensionale Gebiet $\Omega = [0, 1]$, mit n equidistanten Diskretisierungspunkten.

b) das zweidimensionale Gebiet $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, mit m equdistanten Diskretisierungspunkten in jeder Raumdimension ($n = m^2$).

Gegeben die Wärmeleitungsgleichung aus der ersten Programmierübung. Wie sieht die Matrix W reduziert auf die inneren Punkte des Gebiets und unter Berücksichtigung der Randbedingung aus.