

► Numerische Verfahren der optimalen Steuerung

von linear-quadratischen elliptischen Problemen

Projekt zur Vorlesung „Optimale Steuerung elliptischer PDGL“
Universität Konstanz
23. November 2010

Inhaltsübersicht

- ▶ Einleitung
 - Problemstellung
 - Lösungsmethoden
- ▶ E-D Optimierung
 - Nicht-reduziertes Problem
 - Reduziertes Problem
- ▶ Gradientenverfahren
 - Bedingtes Gradientenverfahren
 - Gradienten-Projektionsverfahren
- ▶ Primal-duale AMS
 - Idee
 - Umsetzung
 - Konvergenzeigenschaften

Inhaltsübersicht

- | | |
|-----------------------|--|
| ▶ Einleitung | Problemstellung
Lösungsmethoden |
| ▶ E-D Optimierung | Nicht-reduziertes Problem
Reduziertes Problem |
| ▶ Gradientenverfahren | Bedingtes Gradientenverfahren
Gradienten-Projektionsverfahren |
| ▶ Primal-duale AMS | Idee
Umsetzung
Konvergenzeigenschaften |

Problemstellung

$$\min J(y, u) := \frac{1}{2} \|y - y_\Omega\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2$$

$$-\Delta y = \beta u$$

$$y|_\Gamma = 0$$

$$u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x)$$

Lösungsmethoden

- ▶ **Endlich-dimensionale Optimierung**
 - ▶ Überführung in quadratische Optimierungsaufgaben
- ▶ Gradientenverfahren
 - ▶ Richtungssuche und Schrittweitenbestimmung
- ▶ Primal-duale Aktive-Mengen-Strategie
 - ▶ Aktive und inaktive Mengen zu Ungleichungsrestriktionen

Lösungsmethoden

- ▶ Endlich-dimensionale Optimierung
 - ▶ Überführung in quadratische Optimierungsaufgaben
- ▶ Gradientenverfahren
 - ▶ Richtungssuche und Schrittweitenbestimmung
- ▶ Primal-duale Aktive-Mengen-Strategie
 - ▶ Aktive und inaktive Mengen zu Ungleichungsrestriktionen

Lösungsmethoden

- ▶ Endlich-dimensionale Optimierung
 - ▶ Überführung in quadratische Optimierungsaufgaben
- ▶ Gradientenverfahren
 - ▶ Richtungssuche und Schrittweitenbestimmung
- ▶ Primal-duale Aktive-Mengen-Strategie
 - ▶ Aktive und inaktive Mengen zu Ungleichungsrestriktionen

Inhaltsübersicht

▶ Einleitung	Problemstellung Lösungsmethoden
▶ E-D Optimierung	Nicht-reduziertes Problem Reduziertes Problem
▶ Gradientenverfahren	Bedingtes Gradientenverfahren Gradienten-Projektionsverfahren
▶ Primal-duale AMS	Idee Umsetzung Konvergenzeigenschaften

Nicht-reduziertes Problem

► Unendlich-dimensional

$$\min \frac{1}{2} \|y - y_\Omega\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2$$

$$\begin{aligned} \text{► } -\Delta y &= \beta u \\ y|_\Gamma &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{► } u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x)$$

► Endlich-dimensional

$$\min \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{(n-1)^2} (y_i - y_{\Omega,i})^2 + \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^{(n-1)^2} u_i^2$$

$$\text{► } A_h y = B_h u$$

$$\text{► } u_{a,i} \leq u_i \leq u_{b,i}$$

Nicht-reduziertes Problem

► Unendlich-dimensional

$$\min \frac{1}{2} \|y - y_\Omega\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2$$

$$\begin{aligned} \text{► } -\Delta y &= \beta u \\ y|_\Gamma &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{► } u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x)$$

► Endlich-dimensional

$$\min \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{(n-1)^2} (y_i - y_{\Omega,i})^2 + \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^{(n-1)^2} u_i^2$$

$$\text{► } A_h y = B_h u$$

$$\text{► } u_{a,i} \leq u_i \leq u_{b,i}$$

Nicht-reduziertes Problem

► Unendlich-dimensional

$$\min \frac{1}{2} \|y - y_\Omega\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2$$

$$\begin{aligned} \text{► } -\Delta y &= \beta u \\ y|_\Gamma &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{► } u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x)$$

► Endlich-dimensional

$$\min \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{(n-1)^2} (y_i - y_{\Omega,i})^2 + \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^{(n-1)^2} u_i^2$$

$$\text{► } A_h y = B_h u$$

$$\text{► } u_{a,i} \leq u_i \leq u_{b,i}$$

Nicht-reduziertes Problem

► Unendlich-dimensional

$$\min \frac{1}{2} \|y - y_\Omega\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2$$

$$\begin{aligned} \text{► } -\Delta y &= \beta u \\ y|_\Gamma &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{► } u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x)$$

► Endlich-dimensional

$$\min \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{(n-1)^2} (y_i - y_{\Omega,i})^2 + \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^{(n-1)^2} u_i^2$$

$$\text{► } A_h y = B_h u$$

$$\text{► } u_{a,i} \leq u_i \leq u_{b,i}$$

Nicht-reduziertes Problem

► Unendlich-dimensional

$$\min \frac{1}{2} \|y - y_\Omega\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2$$

$$\begin{aligned} \text{► } -\Delta y &= \beta u \\ y|_\Gamma &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{► } u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x)$$

Optimales Steuerungsproblem

► Endlich-dimensional

$$\min \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{(n-1)^2} (y_i - y_{\Omega,i})^2 + \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^{(n-1)^2} u_i^2$$

$$\text{► } A_h y = B_h u$$

$$\text{► } u_{a,i} \leq u_i \leq u_{b,i}$$

Quadratische Optimierungsaufgabe

Nicht-reduziertes Problem

► Unendlich-dimensional

► Endlich-dimensional

$$\min \frac{1}{2} \|y - y_\Omega\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad \min \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{(n-1)^2} (y_i - y_{\Omega,i})^2 + \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^{(n-1)^2} u_i^2$$

Nicht ausgenutzt:

$$y = y(u)$$

► $-\Delta y = \beta u$
 $y|_\Gamma = 0$

► $A_h y = B_h u$

► $u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x)$

► $u_{a,i} \leq u_i \leq u_{b,i}$

Optimales Steuerungsproblem

Quadratische Optimierungsaufgabe

Nicht-reduziertes Problem

► Unendlich-dimensional

► Endlich-dimensional

$$\min \frac{1}{2} \|y - y_\Omega\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad \min \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{(n-1)^2} (y_i - y_{\Omega,i})^2 + \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^{(n-1)^2} u_i^2$$

Nicht ausgenutzt:

$$y = y(u)$$



► $-\Delta y = \beta u$
 $y|_\Gamma = 0$

► $A_h y = B_h u$

► $u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x)$

► $u_{a,i} \leq u_i \leq u_{b,i}$

Optimales Steuerungsproblem

Quadratische Optimierungsaufgabe

Nicht-reduziertes Problem

► Unendlich-dimensional

► Endlich-dimensional

$$\min \frac{1}{2} \|y - y_\Omega\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad \min \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{(n-1)^2} (y_i - y_{\Omega,i})^2 + \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^{(n-1)^2} u_i^2$$

Nicht ausgenutzt:

$$y = y(u)$$

► $-\Delta y = \beta u$
 $y|_\Gamma = 0$

► $A_h y = B_h u$



Reduzierte Optimierungsaufgabe

► $u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x)$

► $u_{a,i} \leq u_i \leq u_{b,i}$

Optimales Steuerungsproblem

Quadratische Optimierungsaufgabe

Reduziertes Problem

► Unendlich-dimensional

$$\min \frac{1}{2} \|y - y_\Omega\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2$$

$$\begin{aligned} \text{► } & -\Delta y = \beta u \\ & y|_\Gamma = 0 \end{aligned}$$

$$\text{► } u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x)$$

► Endlich-dimensional

$$\begin{aligned} \min \frac{1}{2} \left\| \sum_{i=1}^m u_i y_i - y_\Omega \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \left\| \sum_{i=1}^m u_i e_i \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \\ = \frac{1}{2} u^\top (C + \lambda D) u - a^\top u + \text{const.} \end{aligned}$$

$$\text{► } -$$

$$\text{► } u_a \leq u_i \leq u_b$$

Reduziertes Problem

► Unendlich-dimensional

$$\min \frac{1}{2} \|y - y_\Omega\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2$$

$$\begin{aligned} \text{► } & -\Delta y = \beta u \\ & y|_\Gamma = 0 \end{aligned}$$

$$\text{► } u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x)$$

► Endlich-dimensional

$$\begin{aligned} \min & \frac{1}{2} \left\| \sum_{i=1}^m u_i y_i - y_\Omega \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \left\| \sum_{i=1}^m u_i e_i \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \\ &= \frac{1}{2} u^\top (C + \lambda D) u - a^\top u + \text{const.} \end{aligned}$$

$$\text{► } -$$

$$\text{► } u_a \leq u_i \leq u_b$$

Reduziertes Problem

► Unendlich-dimensional

$$\min \frac{1}{2} \|y - y_\Omega\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2$$

$$\begin{aligned} \text{► } -\Delta y &= \beta u \\ y|_\Gamma &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{► } u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x)$$

► Endlich-dimensional

$$\begin{aligned} \min \frac{1}{2} \left\| \sum_{i=1}^m u_i y_i - y_\Omega \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \left\| \sum_{i=1}^m u_i e_i \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \\ = \frac{1}{2} u^\top (C + \lambda D) u - a^\top u + \text{const.} \end{aligned}$$

$$\text{► } -$$

$$\text{► } u_a \leq u_i \leq u_b$$

Reduziertes Problem

► Unendlich-dimensional

$$\min \frac{1}{2} \|y - y_\Omega\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2$$

$$\begin{aligned} \text{► } -\Delta y &= \beta u \\ y|_\Gamma &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{► } u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x)$$

► Endlich-dimensional

$$\begin{aligned} \min \frac{1}{2} \left\| \sum_{i=1}^m u_i y_i - y_\Omega \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \left\| \sum_{i=1}^m u_i e_i \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \\ = \frac{1}{2} u^\top (C + \lambda D) u - a^\top u + \text{const.} \end{aligned}$$

$$\text{► } -$$

$$\text{► } u_a \leq u_i \leq u_b$$

Reduziertes Problem

► Unendlich-dimensional

$$\min \frac{1}{2} \|y - y_\Omega\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2$$

$$\begin{aligned} \text{► } -\Delta y &= \beta u \\ y|_\Gamma &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{► } u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x)$$

Optimales Steuerungsproblem

► Endlich-dimensional

$$\begin{aligned} \min \frac{1}{2} \left\| \sum_{i=1}^m u_i y_i - y_\Omega \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \left\| \sum_{i=1}^m u_i e_i \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \\ = \frac{1}{2} u^\top (C + \lambda D) u - a^\top u + \text{const.} \end{aligned}$$

► —

$$\text{► } u_a \leq u_i \leq u_b$$

Quadratische Optimierungsaufgabe

Reduziertes Problem

► Unendlich-dimensional

$$\min \frac{1}{2} \|y - y_\Omega\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2$$

Einsatz des reduzierten Problems:

$$\begin{aligned} \text{► } -\Delta y &= \beta u \\ y|_\Gamma &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{► } u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x)$$

Optimales Steuerungsproblem

► Endlich-dimensional

$$\begin{aligned} \min \frac{1}{2} \left\| \sum_{i=1}^m u_i y_i - y_\Omega \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \left\| \sum_{i=1}^m u_i e_i \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \\ = \frac{1}{2} u^\top (C + \lambda D) u - a^\top u + \text{const.} \end{aligned}$$

► –

$$\text{► } u_a \leq u_i \leq u_b$$

Quadratische Optimierungsaufgabe

Reduziertes Problem

► Unendlich-dimensional

► Endlich-dimensional

$$\min \frac{1}{2} \|y - y_\Omega\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2$$

$$\min \frac{1}{2} \left\| \sum_{i=1}^m u_i y_i - y_\Omega \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \left\| \sum_{i=1}^m u_i e_i \right\|_{L_2(\Omega)}^2$$

Einsatz des reduzierten Problems:

$$= \frac{1}{2} u^\top (C + \lambda D) u - a^\top u + \text{const.}$$

► Wenige Ansatzfunktionen

► $-\Delta y = \beta u$
 $y|_\Gamma = 0$

► —

► $u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x)$

► $u_a \leq u_i \leq u_b$

Optimales Steuerungsproblem

Quadratische Optimierungsaufgabe

Reduziertes Problem

► Unendlich-dimensional

► Endlich-dimensional

$$\min \frac{1}{2} \|y - y_\Omega\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad \min \frac{1}{2} \left\| \sum_{i=1}^m u_i y_i - y_\Omega \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \left\| \sum_{i=1}^m u_i e_i \right\|_{L_2(\Omega)}^2$$

Einsatz des reduzierten Problems:

► Wenige Ansatzfunktionen

► $-\Delta y = \beta u$
 $y|_\Gamma = 0$

► –

► Viele Berechnungen mit denselben Ansatzfunktionen

► $u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x)$

► $u_a \leq u_i \leq u_b$

Optimales Steuerungsproblem

Quadratische Optimierungsaufgabe

Inhaltsübersicht

- | | |
|------------------------------|--|
| ▶ Einleitung | Problemstellung
Lösungsmethoden |
| ▶ E-D Optimierung | Nicht-reduziertes Problem
Reduziertes Problem |
| ▶ Gradientenverfahren | Bedingtes Gradientenverfahren
Gradienten-Projektionsverfahren |
| ▶ Primal-duale AMS | Idee
Umsetzung
Konvergenzeigenschaften |

Bedingtes Gradientenverfahren

► Reduziertes Zielfunktional

$$\min \hat{J}(u) := \frac{1}{2} \|Su - y_\Omega\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2$$

► Box-Restriktionen

$$u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x)$$

► Numerisches Verfahren:

(1) Abstiegsrichtung

(2) Schrittweite

Bedingtes Gradientenverfahren

- Reduziertes Zielfunktional

$$\min \hat{J}(u) := \frac{1}{2} \|Su - y_{\Omega}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2$$

- Box-Restriktionen

$$u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x)$$

- Numerisches Verfahren:

- (1) Abstiegsrichtung

- (2) Schrittweite

Bedingtes Gradientenverfahren

- Reduziertes Zielfunktional

$$\min \hat{J}(u) := \frac{1}{2} \|Su - y_{\Omega}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2$$

- Box-Restriktionen

$$u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x)$$

- Numerisches Verfahren:

- (1) Abstiegsrichtung

- (2) Schrittweite

Bedingtes Gradientenverfahren

- Reduziertes Zielfunktional

$$\min \hat{J}(u) := \frac{1}{2} \|Su - y_{\Omega}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2$$

- Box-Restriktionen

$$u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x)$$

- Numerisches Verfahren:

- (1) Abstiegsrichtung

- (2) Schrittweite

Bedingtes Gradientenverfahren

- Reduziertes Zielfunktional

$$\min \hat{J}(u) := \frac{1}{2} \|Su - y_\Omega\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2$$

Problem:

- Box-Restriktionen

$$u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x)$$

- Numerisches Verfahren:

- (1) Abstiegsrichtung
- (2) Schrittweite

Bedingtes Gradientenverfahren

- Reduziertes Zielfunktional

$$\min \hat{J}(u) := \frac{1}{2} \|Su - y_\Omega\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2$$

Problem:

- Box-Restriktionen

- Übliches Gradientenverfahren läuft i.A. aus U_{ad} heraus

- Numerisches Verfahren:

- (1) Abstiegsrichtung

- (2) Schrittweite

Bedingtes Gradientenverfahren

- Reduziertes Zielfunktional

$$\min \hat{J}(u) := \frac{1}{2} \|Su - y_\Omega\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2$$

Problem:

- Box-Restriktionen

- Übliches Gradientenverfahren läuft i.A. aus U_{ad} heraus

Lösung:

- Numerisches Verfahren:

- (1) Abstiegsrichtung
- (2) Schrittweite

Bedingtes Gradientenverfahren

- Reduziertes Zielfunktional

$$\min \hat{J}(u) := \frac{1}{2} \|Su - y_\Omega\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2$$

Problem:

- Box-Restriktionen

- Übliches Gradientenverfahren läuft i.A. aus U_{ad} heraus

Lösung:

- Numerisches Verfahren:

- Konstruiere geeignete Abstiegsrichtung

(1) Abstiegsrichtung

(2) Schrittweite

Bedingtes Gradientenverfahren

► Gradient

$$\nabla \hat{J}(u_n)(x) = \lambda u_n(x) + \beta(x)p_n(x)$$

► Konstruktion der Abstiegsrichtung $v_n - u_n$

$$v_n(x) := \begin{cases} u_b(x) : & \nabla \hat{J}(u_n)(x) < 0 \\ 1/2(u_a(x) + u_b(x)) : & \nabla \hat{J}(u_n)(x) = 0 \\ u_a(x) : & \nabla \hat{J}(u_n)(x) > 0 \end{cases}$$

► Wähle Schrittweite s

Bedingtes Gradientenverfahren

► Gradient

$$\nabla \hat{J}(u_n)(x) = \lambda u_n(x) + \beta(x)p_n(x)$$

► Konstruktion der Abstiegsrichtung $v_n - u_n$

$$v_n(x) := \begin{cases} u_b(x) : & \nabla \hat{J}(u_n)(x) < 0 \\ 1/2(u_a(x) + u_b(x)) : & \nabla \hat{J}(u_n)(x) = 0 \\ u_a(x) : & \nabla \hat{J}(u_n)(x) > 0 \end{cases}$$

► Wähle Schrittweite s

Bedingtes Gradientenverfahren

► Gradient

$$\nabla \hat{J}(u_n)(x) = \lambda u_n(x) + \beta(x)p_n(x)$$

► Konstruktion der Abstiegsrichtung $v_n - u_n$

$$v_n(x) := \begin{cases} u_b(x) : & \nabla \hat{J}(u_n)(x) < 0 \\ 1/2(u_a(x) + u_b(x)) : & \nabla \hat{J}(u_n)(x) = 0 \\ u_a(x) : & \nabla \hat{J}(u_n)(x) > 0 \end{cases}$$

► Wähle Schrittweite s

Gradienten-Projektionsverfahren

- Reduziertes Zielfunktional

$$\min \hat{J}(u) := \frac{1}{2} \|Su - y_\Omega\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2$$

Problem:

- Box-Restriktionen

- Übliches Gradientenverfahren läuft i.A. aus U_{ad} heraus

Lösung:

- Numerisches Verfahren:

- Konstruiere geeignete Abstiegsrichtung

(1) Abstiegsrichtung

(2) Schrittweite

Gradienten-Projektionsverfahren

- Reduziertes Zielfunktional

$$\min \hat{J}(u) := \frac{1}{2} \|Su - y_\Omega\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2$$

Problem:

- Box-Restriktionen

- Übliches Gradientenverfahren läuft i.A. aus U_{ad} heraus

Lösung:

- Numerisches Verfahren:

~~► Konstruiere geeignete Abstiegsrichtung~~

(1) Abstiegsrichtung

(2) Schrittweite

Gradienten-Projektionsverfahren

- Reduziertes Zielfunktional

$$\min \hat{J}(u) := \frac{1}{2} \|Su - y_\Omega\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2$$

Problem:

- Box-Restriktionen

- Übliches Gradientenverfahren läuft i.A. aus U_{ad} heraus

Lösung:

- Numerisches Verfahren:

~~► Konstruiere geeignete Abstiegsrichtung~~

(1) Abstiegsrichtung

- Wähle negativen Gradienten als Abstiegsrichtung

(2) Schrittweite

Gradienten-Projektionsverfahren

- Reduziertes Zielfunktional

$$\min \hat{J}(u) := \frac{1}{2} \|Su - y_\Omega\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2$$

Problem:

- Box-Restriktionen

- Übliches Gradientenverfahren läuft i.A. aus U_{ad} heraus

Lösung:

- Numerisches Verfahren:

~~► Konstruiere geeignete Abstiegsrichtung~~

(1) Abstiegsrichtung

- Wähle negativen Gradienten als Abstiegsrichtung

(2) Schrittweite

- Projiziere herausgelaufene Iterationsschritte wieder nach U_{ad}

Gradienten-Projektionsverfahren

- Abstiegsrichtung

$$v_n := -\nabla \hat{J}(u_n)$$

- Wähle Schrittweite s

- Neuer Iterationspunkt

$$u_{n+1} := \mathbf{P}_{[u_a, u_b]}(u_n + s_n v_n)$$

Inhaltsübersicht

- | | |
|---------------------------|---|
| ► Einleitung | Problemstellung
Lösungsmethoden |
| ► E-D Optimierung | Nicht-reduziertes Problem
Reduziertes Problem |
| ► Gradientenverfahren | Bedingtes Gradientenverfahren
Gradienten-Projektionsverfahren |
| ► Primal-duale AMS | Idee
Umsetzung
Konvergenzeigenschaften |

Idee

- Charakterisierung der optimalen Steuerung:

$$\bar{u}(x) = \mathbf{P}_{[u_a, u_b]}(-\lambda^{-1}p(x))$$

- Umformulierung mit $\mu := -(\lambda^{-1}p + \bar{u})$

u optimal $\Leftrightarrow$

$$u(x) = \begin{cases} u_b(x) : & u(x) + \mu(x) > u_b(x) \\ -\lambda^{-1}p(x) : & u(x) + \mu(x) \in [u_a(x), u_b(x)] \\ u_a(x) : & u(x) + \mu(x) < u_a(x) \end{cases}$$

Idee

- Charakterisierung der optimalen Steuerung:

$$\bar{u}(x) = \mathbf{P}_{[u_a, u_b]}(-\lambda^{-1}p(x))$$

- Umformulierung mit $\mu := -(\lambda^{-1}p + \bar{u})$

u optimal $\Leftrightarrow$

$$u(x) = \begin{cases} u_b(x) : & u(x) + \mu(x) > u_b(x) \\ -\lambda^{-1}p(x) : & u(x) + \mu(x) \in [u_a(x), u_b(x)] \\ u_a(x) : & u(x) + \mu(x) < u_a(x) \end{cases}$$

Idee

- Charakterisierung der optimalen Steuerung:

$$\bar{u}(x) = \mathbf{P}_{[u_a, u_b]}(-\lambda^{-1}p(x))$$

- Umformulierung mit $\mu := -(\lambda^{-1}p + \bar{u})$

u optimal $\Leftrightarrow$

$$u(x) = \begin{cases} u_b(x) : & u(x) + \mu(x) > u_b(x) \\ -\lambda^{-1}p(x) : & u(x) + \mu(x) \in [u_a(x), u_b(x)] \\ u_a(x) : & u(x) + \mu(x) < u_a(x) \end{cases}$$

Idee

- Charakterisierung der optimalen Steuerung:

$$\bar{u}(x) = \mathbf{P}_{[u_a, u_b]}(-\lambda^{-1}p(x))$$

- Umformulierung mit $\mu := -(\lambda^{-1}p + \bar{u})$

u optimal $\Leftrightarrow$

$$u(x) = \begin{cases} u_b(x) : & u(x) + \mu(x) > u_b(x) & \mu(x) > 0 \\ -\lambda^{-1}p(x) : & u(x) + \mu(x) \in [u_a(x), u_b(x)] & \mu(x) = 0 \\ u_a(x) : & u(x) + \mu(x) < u_a(x) & \mu(x) < 0 \end{cases}$$

Umsetzung

- u optimal $\Leftrightarrow$

$$u(x) = \begin{cases} u_b(x) : & u(x) + \mu(x) > u_b(x) \\ -\lambda^{-1}p(x) : & u(x) + \mu(x) \in [u_a(x), u_b(x)] \\ u_a(x) : & u(x) + \mu(x) < u_a(x) \end{cases}$$

- Aktive und inaktive Mengen

$$A_n^b = \{x : u_{n-1}(x) + \mu_{n-1}(x) > u_b(x)\}$$

$$I_n = \{x : u_{n-1}(x) + \mu_{n-1}(x) \in [u_a(x), u_b(x)]\}$$

$$A_n^a = \{x : u_{n-1}(x) + \mu_{n-1}(x) < u_a(x)\}$$

Umsetzung

- Wähle u_0 und μ_0
- Bestimme aktive und inaktive Mengen

$$A_n^b = \{x : u_{n-1}(x) + \mu_{n-1}(x) > u_b(x)\}$$

$$I_n = \{x : u_{n-1}(x) + \mu_{n-1}(x) \in [u_a(x), u_b(x)]\}$$

$$A_n^a = \{x : u_{n-1}(x) + \mu_{n-1}(x) < u_a(x)\}$$

- Löse

$$-\Delta y = u$$

$$-\Delta p = y - y_\Omega$$

$$u = \chi_n^a u_a + \chi_n^b u_b + (1 - \chi_n^a - \chi_n^b) \lambda^{-1} p$$

Umsetzung

- Wähle u_0 und μ_0
- Bestimme aktive und inaktive Mengen

$$A_n^b = \{x : u_{n-1}(x) + \mu_{n-1}(x) > u_b(x)\}$$

$$I_n = \{x : u_{n-1}(x) + \mu_{n-1}(x) \in [u_a(x), u_b(x)]\}$$

$$A_n^a = \{x : u_{n-1}(x) + \mu_{n-1}(x) < u_a(x)\}$$

- Löse

$$-\Delta y = u$$

$$-\Delta p = y - y_\Omega$$

$$u = \chi_n^a u_a + \chi_n^b u_b + (1 - \chi_n^a - \chi_n^b) \lambda^{-1} p$$

Umsetzung

- Wähle u_0 und μ_0
- Bestimme aktive und inaktive Mengen

$$A_n^b = \{x : u_{n-1}(x) + \mu_{n-1}(x) > u_b(x)\}$$

$$I_n = \{x : u_{n-1}(x) + \mu_{n-1}(x) \in [u_a(x), u_b(x)]\}$$

$$A_n^a = \{x : u_{n-1}(x) + \mu_{n-1}(x) < u_a(x)\}$$

- Löse

$$-\Delta y = u$$

$$-\Delta p = y - y_\Omega$$

$$u = \chi_n^a u_a + \chi_n^b u_b + (1 - \chi_n^a - \chi_n^b) \lambda^{-1} p$$

Konvergenzeigenschaften

- Primal-duale Aktive-Mengen-Strategie ist äquivalent zu halbglattem Newton-Verfahren
- Superlineare Konvergenz

Konvergenzeigenschaften

- Primal-duale Aktive-Mengen-Strategie ist äquivalent zu halbglattem Newton-Verfahren
- Superlineare Konvergenz