Analysis 2

1. Metrische Räume

<u>Definition 1.1.</u> Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d: X \times X \to [0,\infty)$ heißt <u>Metrik auf X</u>, falls

a) $\forall x,y \in X: d(x,y) = d(y,x)$ (Symmetrie)

b) $\forall x,y \in X: d(x,y) = 0 \iff x = y$

c) $\forall x,y,z \in X: d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (Dreiecksungleichung)

In diesem Fall heißt (X,d) <u>metrischer Raum</u>.

<u>Beispiel 1.2.</u> a) $X = [0,1]$, $d(x,y) = |x-y|$

b) $\emptyset \neq X$ Menge, $d(x,y) = 1$ für $x \neq y$ und $d(x,x) = 0$ (diskrete oder triviale Metrik).

c) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann definiert

$$d(x,y) := \|x-y\|$$

eine Metrik auf X. Insbesondere erhalten wir für $X = \mathbb{K}^n$ und die euklidische Norm $\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$ für $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n$ die euklidische Metrik.

d) Seien (X,d) metrischer Raum und $M \subset X$. Dann ist $(M, d|_M)$ metrischer Raum. $\Diamond$

In einem metrischen Raum lassen sich die Definitionen und Sätze ganz analog zum normierten Raum formulieren bzw. beweisen.

<u>Definition 1.3.</u> Sei (X,d) ein metrischer Raum.

a) Eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ heißt <u>Cauchyfolge</u>, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n,m > n_0: d(x_n,x_m) < \varepsilon.$$

b) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ heißt <u>konvergent gegen $x_0 \in X$</u> (in Zeichen $x_n \to x_0$), falls

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : d(x_n, x_0) < \varepsilon$

c) X heißt <u>vollständig</u>, wenn jede Cauchyfolge konvergiert

<u>Lemma 1.4</u> $\mathbb{K}^n$ mit der euklidischen Metrik ist vollständig.

Im folgenden sei (X,d) ein metrischer Raum.

<u>Definition 1.5</u> a) Zu $x \in X$, $r > 0$ heißt $B(x,r) := \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$ die <u>offene Kugel</u> um x mit Radius r.

b) Seien $M \subset X$ und $x \in M$. x heißt <u>innerer Punkt von M</u>, falls
$$\exists \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \subset M.$$
M heißt <u>offen</u>, falls jeder Punkt von M innerer Punkt ist, und <u>abgeschlossen</u>, falls $X \setminus M$ offen ist. x heißt <u>Häufungspunkt</u> von M, falls eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M \setminus \{x\}$ existiert mit $x_n \to x \; (n \to \infty)$. Der <u>Abschluß</u> $\overline{M}$ von M ist $M \cup \{x : x$ Häufungspunkt von $M\}$. x heißt <u>Randpunkt</u> von <u>M</u>, falls
$$\forall \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \cap M \neq \emptyset, \; B(x,\varepsilon) \cap (X \setminus M) \neq \emptyset.$$
Die Menge $\partial M = \{x : x$ Randpunkt von $M\}$ heißt <u>Rand von M</u>.

c) $U \subset X$ heißt <u>Umgebung von x</u> $\in X$, falls
$$\exists \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \in U,$$
d.h., falls x innerer Punkt von U ist.

<u>Lemma 1.6</u> Sei $\tau := \{U \subset X ; U \text{ offen}\}$. Dann gelten:

a) $\emptyset, X \in \tau$.

b) $U, V \in \tau \Rightarrow U \cap V \in \tau$

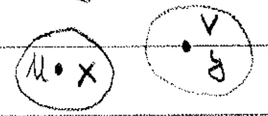
c) Seien I eine Menge und $\{U_i\}_{i\in I}$ eine Familie mit $U_i \in \tau$. Dann folgt $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$.

<u>Definition 1.7</u> a) Seien X eine Menge und τ eine Familie von Teilmengen von X, welche die Bedingungen a) - c) aus Lemma 1.6 erfüllen. Dann heißt (X,τ) ein <u>topologischer Raum</u>. Eine Menge $U \subset X$ heißt <u>offen</u>, falls $U \in \tau$ gilt. $V \subset X$ heißt <u>Umgebung von $x \in X$</u>, falls

$$\exists\, U \in \tau : x \in U \subset V.$$

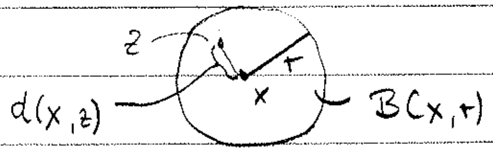
b) Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann ist (X,d) ein <u>Hausdorffraum</u>, falls

$$\forall x,y \in X,\ x \neq y\ \exists\, U,V \in \tau : x \in U,\ y \in V,\ U \cap V = \emptyset$$



<u>Bemerkung 1.8</u> a) Nach Lemma 1.6 bildet das System der offenen Teilmengen eines metrischen Raumes einen topologischen Raum.

b) Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann ist (X,d) ein Hausdorffraum, da für $\varepsilon = \frac{1}{2} d(x,y)$ gilt: $B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon) = \emptyset$ bei $x \neq y$. Beachte, dass $B(x,r)$ offen ist, denn zu $z \in B(x,r)$ gilt $B(z,\varepsilon) \subset B(x,r)$ für $\varepsilon = r - d(x,z) > 0$



◇

<u>Definition 1.9</u> (Stetigkeit) Seien (X,d_X) und (Y,d_Y) metrische Räume $f : X \to Y$ eine Funktion. f heißt <u>stetig in $x_0 \in X$</u>, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X\ d_X(x,x_0) < \delta : d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

$(\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : f(B(x,\delta)) \subset B(f(x),\varepsilon))$.

f heißt <u>stetig</u> (in X), falls f in allen $x_0 \in X$ stetig ist. Wir setzen $C(X,Y) = \{f : X \to Y \mid f \text{ stetig}\}$.

Analog zum normierten Fall wird gleichmäßig stetig definiert.

Satz 1.10. Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume und $f: X \to Y$ eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

a) f ist stetig.

b) Für alle Folgen $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ mit $x_n \to x_0 \in X$ gilt $f(x_n) \to f(x_0) \in Y$.

c) Für alle offenen Mengen $U \subset Y$ ist $f^{-1}(U)$ offen in X.

d) Für alle abgeschlossenen Mengen $A \subset Y$ ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in X.

Beispiel 1.11. Seien $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$ jeweils mit der euklidischen Metrik. Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Für $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$f(r, \alpha r) = \frac{r^2 \alpha}{r^2 + \alpha^2 r^2} = \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \not\to 0 \quad (r \to 0).$$

f ist also nicht stetig in $(0,0)$. Aber f ist partiell stetig in $(0,0)$, d.h., die Ableitungen $x \mapsto f(x,0)$ und $y \mapsto f(0,y)$ sind stetig in 0, denn $\lim_{x \to 0} f(x,0) = 0 = \lim_{y \to 0} f(0,y)$. $\Diamond$

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Wie im normierten Fall heißt $K \subset X$ kompakt, wenn jede offene Überdeckung $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ eine endliche Teilüberdeckung hat.

Satz 1.12. Seien $f: X \to Y$ stetig und $K \subset X$ kompakt. Dann ist der Wertebereich $f(K)$ kompakt.

Satz 1.13. a) Sei $K \subset X$ kompakt. Dann ist K beschränkt, d.h. $\exists N > 0: K \subset B(0, N)$.

und abgeschlossen.

b) Seien $K \subset X$ kompakt und $A \subset K$ abgeschlossen. Dann ist A kompakt.

c) Seien $f \in C(X, Y)$ und $K \subset X$ kompakt. Dann ist $f(K)$ beschränkt und abgeschlossen, und $f|_K$ ist gleichmäßig stetig.

Die folgenden Übungen verallgemeinern den Zwischenwertsatz.

<u>Definition 1.14.</u> Sei (X, d) ein metrischer Raum (oder allgemeiner: topologischer Raum). X heißt <u>zusammenhängend</u>, falls es kein $A \subset X$ gibt mit $\emptyset \subsetneq A \subsetneq X$, A abgeschlossen und offen.

<u>Bemerkung 1.15</u> a) Es gelten: X ist zusammenhängend
$\Leftrightarrow$ $\nexists A, B$ offen, $A, B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = X$
$\Leftrightarrow$ $\nexists A, B$ abgeschlossen, $A, B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = X$.

b) Sei $X = \{0, 1\}$ ausgestattet mit der diskreten Metrik. Dann ist X nicht zusammenhängend, denn $X = \{0\} \cup \{1\} = B(0, 1/2) \cup B(1, 1/2)$ und $B(0, 1/2) = \{0\} \neq \emptyset$, $B(1, 1/2) = \{1\} \neq \emptyset$.

c) Die Menge $X = [0, 1] \cup [2, 3] \subset \mathbb{R}$ ist nicht zusammenhängend. X ist nämlich die Vereinigung der beiden nichtleeren, disjunkten, X-offenen Mengen $A = [0, 1]$ und $B = [2, 3]$. $\Diamond$

<u>Satz 1.16</u> (Zwischenwertsatz). Seien (X, d_X) zusammenhängender metrischer Raum, (Y, d_Y) metrischer Raum und $f: X \to Y$ stetig. Dann ist $f(X)$ zusammenhängend.

<u>Bemerkung 1.17.</u> Der Beweis von Satz 1.16 verwendet nur

topologische Eigenschaften. Damit gilt der Satz auch, wenn X und Y topologische Räume sind. Es gilt: f ist stetig $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(V)$ ist offen für alle offenen Mengen V (auch in topologischen Räumen).