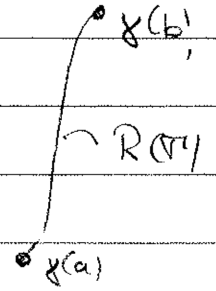
10. Kurvenintegrale

Sei Γ eine glatte Kurve in $\mathbb{R}^n$ mit Wertebereich $R(\Gamma) := \{\gamma(t) : t \in [a,b]\} = R(\gamma)$, wobei $\Gamma = [\gamma]$, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, ein glatter Weg ist. Beachte, dass $R(\Gamma)$ wohldefiniert ist, also nicht von der Wahl des Repräsentanten γ abhängt.



Wir wollen nun Funktion $f : R(\Gamma) \to \mathbb{R}^n$ betrachten, also wird jedem Punkt $x \in R(\Gamma)$ ein Vektor $f(x) \in \mathbb{R}^n$ zugeordnet (Vektorfeld). Ziel ist es, den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zu verallgemeinern. Dazu definiert man für $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ glatt und $f : R(\gamma) \to \mathbb{R}^n$ stetig das Kurvenintegral

$$\int_\Gamma \langle f(x), dx \rangle := \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt.$$

Physikalisch entspricht dies etwa "Kraft × Weg längs $R(\gamma)$". Wir formulieren das im Rahmen der Pfaffschen Formen.

Definition 10.1 Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ heißt eine *0-Form in U*. Eine stetige Abbildung $\omega : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x,h) \mapsto \omega(x,h)$ heißt *1-Form in U*, falls ω linear in h ist. Man spricht auch von einer *Pfaffschen Form* oder *Differentialform* erster Ordnung. Ersetzt man U durch $R(\Gamma)$, spricht man von *Pfaffschen Formen längs* (oder *auf*) Γ.

Beispiel 10.2 a) Seien U offen und $v : U \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann ist $\omega(x,h) := \langle v(x), h \rangle$ $(x \in U, h \in \mathbb{R}^n)$ eine 1-Form auf Γ.

b) Seien U offen und $f \in C^1(U;\mathbb{R})$. Dann ist $df : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $df(x,h) := \langle \nabla f(x), h \rangle = f'(x)h = f'(x,h)$ eine 1-Form in U. df heißt auch totales Differential von f. $\Diamond$

Bezeichnung 10.3. Für $i = 1,\dots,n$ definiere $dx_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h \mapsto dx_i(h) = h_i = \langle h, e_i \rangle$ (Projektion auf die i-te Komponente.

Sei nun $\omega: \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n$ eine 1-Form. Setzt man $\omega_i(x) := \omega(x, e_i)$, so ist ...

$$\omega(x,h) = \sum_{i=1}^n \omega(x,e_i)\, h_i = \sum_{i=1}^n \omega_i(x)\, dx_i(h) = \langle w(x), dx(h) \rangle$$

mit $w(x) = (\omega_1(x), \dots, \omega_n(x))^T$, $dx = (dx_1, \dots, dx_n)^T$. Beachte: $\omega_i : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $dx_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Speziell gilt für $f \in C^1(\mathcal{U}; \mathbb{R})$:

$$df(x,h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, dx_i(h), \quad x \in \mathcal{U},\ h \in \mathbb{R}^n.$$

Kurz:

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i$$

◇

<u>Definition 10.4</u> Seien $\Gamma = [\gamma]$, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine glatte, orientierte Kurve und ω eine 1-Form auf $R(\Gamma)$. Dann heißt

$$\int_\Gamma \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t), \gamma'(t))\, dt$$

das <u>Kurvenintegral</u> von ω längs Γ. Analog wird das Kurvenintegral für stückweise glatte Kurven definiert.

<u>Bemerkung 10.5</u> a) Seien $v : R(\Gamma) \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld und $\omega(x,h) := \langle v(x), h \rangle$. Dann ist $\int_\Gamma \omega = \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle\, dt$.

b) $\int_\Gamma \omega$ ist wohldefiniert. Seien $\gamma_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}^n$ zwei Repräsentanten von Γ und $\varphi : [a_2, b_2] \to [a_1, b_1]$ mit $\varphi' > 0$ und $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$. Dann ist

$$\int_{a_1}^{b_1} \omega(\gamma_1(t), \gamma_1'(t))\, dt = \int_{a_2}^{b_2} \omega(\gamma_1(\varphi(\tau)), \gamma_1'(\varphi(\tau)))\, \varphi'(\tau)\, d\tau$$
$$= \int_{a_2}^{b_2} \omega(\gamma_2(\tau), \gamma_2'(\tau))\, d\tau.$$

c) Offensichtlich ist $\int_\Gamma \omega_1 + \omega_2 = \int_\Gamma \omega_1 + \int_\Gamma \omega_2$, $\int_\Gamma c\,\omega = c \int_\Gamma \omega$ und $\int_{\Gamma_2 + \Gamma_1} \omega = \int_{\Gamma_2} \omega + \int_{\Gamma_1} \omega$ mit $\Gamma_2 + \Gamma_1$ $(= \Gamma_2 \times \Gamma_1)$ Verknüpfung von Γ_1 und Γ_2.

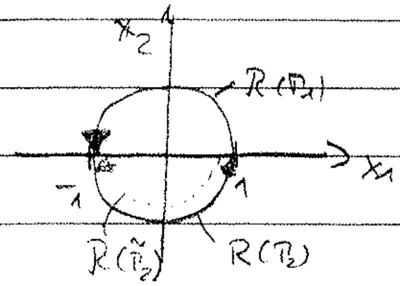
◇

<u>Beispiel 10.6</u> a) Seien $\Gamma_1 = [\gamma_1]$ mit $\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, \pi]$, $v(x) = \frac{x}{|x|}$ $(x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ und $\omega(x,h) := \langle v(x), h \rangle$ $(x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, h \in \mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\int_{\Gamma_1} \omega = \int_0^\pi \left\langle \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\rangle dt = 0.$$

Ebenso für $\Gamma_2 = [\gamma_2]$, $\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [\pi, 2\pi]$: $\int_{\Gamma_2} \omega = 0$, d.h.,

$\int_{\Gamma_2+\Gamma_1} \omega = 0$,
wobei $\Gamma_2+\Gamma_1$ ein geschlossener Weg ist (Anfangs- und Endpunkt stimmen überein).



b) Seien Γ_1, Γ_2 wie in a), $\tilde v(x) := \frac{1}{|x|^2}\binom{-x_2}{x_1}$ und $\tilde\omega(x,\cdot) = \langle \tilde v(x), \cdot\rangle$. Dann erhalten wir
$$\int_{\Gamma_1}\tilde\omega = \int_0^\pi \left\langle \binom{-\sin t}{\cos t}, \binom{-\sin t}{\cos t}\right\rangle dt = \int_0^\pi 1\,dt = \pi.$$
Ebenso ist $\int_{\Gamma_2}\tilde\omega = \pi$, d.h., $\int_{\Gamma_2+\Gamma_1}\tilde\omega = 2\pi$. Für $\tilde\Gamma_2 = [\tilde\gamma_2]$, $\tilde\gamma_2(t) = \binom{\cos(-t)}{\sin(-t)}$, $t\in[0,\pi]$, gilt analog:
$$\int_{\tilde\Gamma_2}\tilde\omega = \int_0^\pi \left\langle \binom{-\sin(-t)}{\cos(-t)}, \binom{\sin(-t)}{-\cos(-t)}\right\rangle dt = \int_0^\pi (-1)\,dt = -\pi.$$
$\tilde\Gamma_2$ ist Γ_2 in umgekehrter Richtung durchlaufen. Also ist hier $\int_{\Gamma_1}\tilde\omega \neq \int_{\tilde\Gamma_2}\tilde\omega$, obwohl Anfangs- und Endpunkte übereinstimmen. Ebenso ist $\int_{\Gamma_2+\Gamma_1}\tilde\omega \neq 0$, obwohl $\Gamma_2+\Gamma_1$ ein geschlossener Weg ist.

c) Seien $U\subset\mathbb{R}^n$ und $\omega = df$ mit $f\in C^1(U;\mathbb{R})$. Dann ist für eine Kurve Γ in U:
$$\int_\Gamma \omega = \int_a^b f'(\gamma(t), \gamma'(t))\,dt = \int_a^b (f\circ\gamma)'(t)\,dt = (f\circ\gamma)(b) - (f\circ\gamma)(a) = f(B) - f(A)$$
mit Anfangspunkt $A=\gamma(a)$ und Endpunkt $B=\gamma(b)$ von Γ. Also hängt $\int_\Gamma\omega$ hier nur vom Anfangs- und Endpunkt ab, aber nicht vom ganzen Wertebereich $R(\Gamma)$ ab. ◊

<u>Definition 10.7</u> Eine 1-Form $\omega: U\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ heißt <u>exakt</u>, falls ein $f\in C^1(U;\mathbb{R})$ existiert mit $\omega = df$ (d.h., $\omega(x,h) = \langle\nabla f(x), h\rangle$). In diesem Fall heißt f eine <u>Stammfunktion</u> von f.

<u>Satz 10.8.</u> Sei $\omega: U\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ eine 1-Form. Dann ist ω genau dann exakt, wenn $\int_{\Gamma_1}\omega = \int_{\Gamma_2}\omega$ für alle stückweise glatten Wege Γ_1, Γ_2 in U mit denselben Anfangs- und Endpunkten ($\Leftrightarrow$: $\int_\Gamma\omega$ ist wegunabhängig).

<u>Beispiel 10.9</u> a) $\omega(x,\cdot) = \langle \frac{x}{|x|^2}, \cdot \rangle$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann gilt $\omega(x,\cdot) = \langle \nabla f(x), \cdot \rangle$ mit $f(x) = \ln|x|$, $x \in U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Damit ist ω exakt.

b) $\tilde{\omega}(x,\cdot) = \langle \frac{1}{|x|^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \cdot \rangle$ ist nicht exakt, da $\int_{\Pi_2 + \Pi_1} \tilde{\omega} = 2\pi \neq 0$. ◊

<u>Bemerkung 10.10.</u> Sei ω exakt, d.h., $\omega = df$ für ein $f \in C^1(U;\mathbb{R})$. Falls $\omega \in C^1(U \times \mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, so ist $\omega(x,h) = \sum_{i=1}^n \omega_i(x) h_i = \sum_{i=1}^n \partial_i f(x) h_i$, d.h., $\omega_i(x) = \partial_i f(x)$, $x \in U$, (vgl. Bezeichnung 10.3). Damit folgt

$$\partial_j \omega_i = \partial_j \partial_i f = \partial_i \partial_j f = \partial_i \omega_j.$$

Für exakte 1-Formen gilt also

$$\partial_j \omega_i = \partial_i \omega_j, \quad 1 \leq i,j \leq n.$$

Im Beispiel $\omega(x,h) = \langle \frac{1}{|x|^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, h \rangle$ gelten

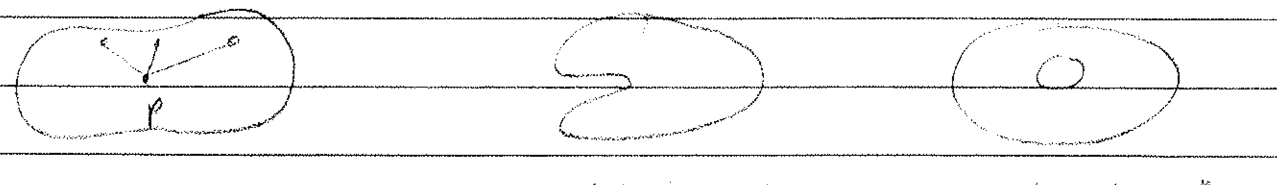
$$\partial_2 \omega_1 = \partial_2 \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{(x_1^2 + x_2^2)(-1) - (-x_2) 2 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

und

$$\partial_1 \omega_2 = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}.$$

Es ist also $\partial_1 \omega_2 = \partial_2 \omega_1$, aber ω ist nicht exakt. ◊

<u>Definition 10.11.</u> Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt <u>sternförmig</u> bezüglich eines Punktes $p \in U$, falls für alle $x \in U$ die Strecke S_{px} von p nach x in U liegt. (Man kann von p aus jeden Punkt in U sehen).



sternförmig bzgl. p — nicht sternförmig — nicht sternförmig

<u>Satz 10.12</u> Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sternförmig und ω eine stetig differenzierbare 1-Form in U. Dann gilt

$$\omega \text{ exakt} \iff \partial_j \omega_i = \partial_i \omega_j \quad (i,j = 1,\ldots,n).$$