11. Integration auf Untermannigfaltigkeiten

11.1. Untermannigfaltigkeiten

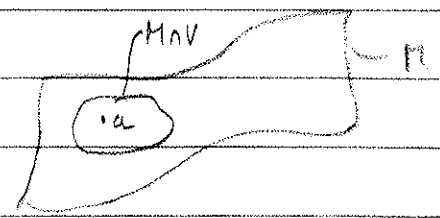
Wir wollen jetzt Funktionen auf Flächen integrieren (insbesondere auch die konstante Funktion 1, also die Fläche messen). Dazu verwenden wir folgende Darstellungen:

Satz 11.1. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge. Dann sind äquivalent:

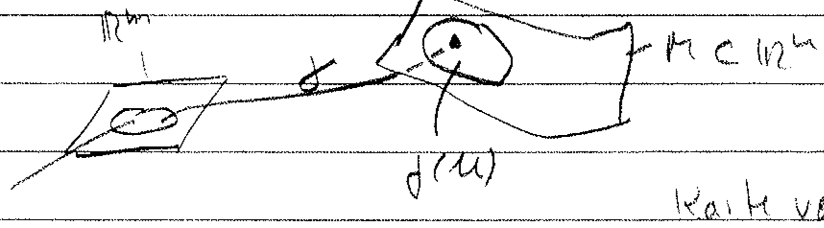
(i) Für alle $a \in M$ existieren eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$ von a und eine Parametrisierung $\gamma : \mathbb{R}^m \supset U \to \mathbb{R}^n$ einer m-dimensionalen Fläche mit $M \cap V = \gamma(U)$ (γ stetig differenzierbar mit $\operatorname{rk} \gamma'(u) = m$ für alle $u \in U$).

(ii) Für alle $a \in M$ existieren offene Umgebungen $V \subset \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$ und ein $f \in C^1(U; \mathbb{R}^{n-m})$ mit $M \cap V = \operatorname{graph} f = \{(u, f(u)) : u \in U\}$.

(iii) Für alle $a \in M$ existieren offene Umgebungen $V \subset \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^n$ und ein $g \in C^1(W; \mathbb{R}^{n-m})$ mit $\operatorname{rk} g'(x) = n-m$ $(x \in W)$ und $M \cap V = \{x \in W : g(x) = 0\}$.



Definition 11.2 Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt m-dimensionale (C^1-) Untermannigfaltigkeit, falls M die äquivalenten Bedingungen (i)-(iii) aus Satz 11.1 erfüllt. Eine Parametrisierung γ wie in Satz 11.1-(i) heißt auch Karte von M. Ersetzt man überall C^1 durch C^k mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, so spricht man von einer C^k-Untermannigfaltigkeit.



Karte von M.

Beispiel 11.3. (n-1)-dimensionale Sphäre $S_{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$.

1) Es ist $S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$ für $g(x) = |x|^2 - 1$.

2) Seien $a \in S_{n-1}$ mit $a_n > 0$ und $U = \{u \in \mathbb{R}^{n-1} : |u| < 1\} \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Dann gilt

$$S_{n-1} \cap (U \times (0,\infty)) = \{(u, f(u)) : u \in U\}$$

für $f : U \to \mathbb{R}$, $u \mapsto f(u) := \sqrt{1 - |u|^2}$. Falls $a_n < 0$ ist, gilt eine analoge Darstellung mit $f(u) = -\sqrt{1-|u|^2}$. Falls $a_n = 0$ ist, existiert ein $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ mit $a_i \neq 0$. Dann verläuft die Argumentation wieder analog.

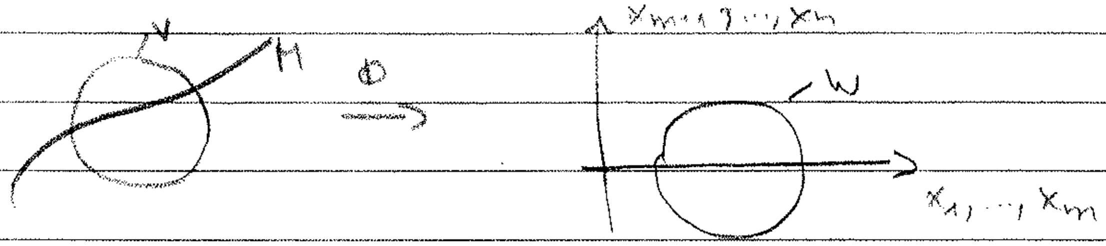
3) Für $a_n > 0$ ist

$$S_{n-1} \cap (U \times (0,\infty)) = \{x \in U \times (0,\infty) : g(x) = 0\}$$

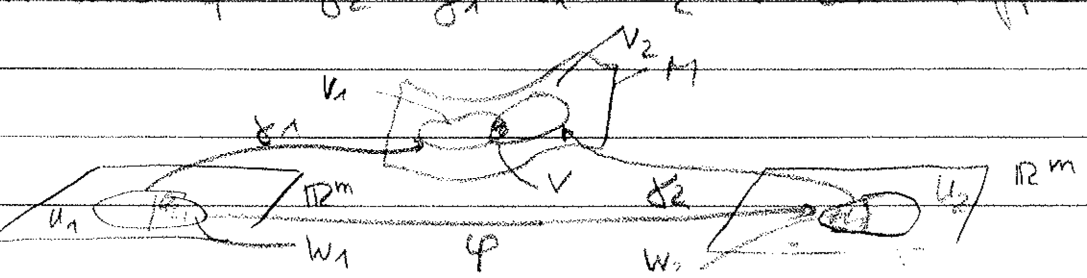
mit $g(x) := x_n - \sqrt{1 - x_1^2 - \ldots - x_{n-1}^2}$.

Satz 11.4. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann m-dimensionale Untermannigfaltigkeit, falls für alle $a \in M$ eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$ und einen Diffeomorphismus $\Phi : V \to W$, $W \subset \mathbb{R}^n$ offen, existieren mit

$$\Phi(M \cap V) = \{x \in W : x_{m+1} = \ldots = x_n = 0\}$$



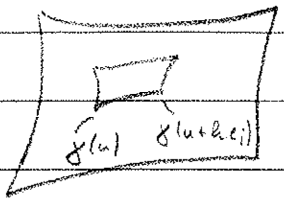
Satz 11.5 (Kartenwechsel). Sei M m-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $\gamma_j : \mathbb{R}^m \supset U_j \to V_j \subset M$, $j = 1, 2$, zwei Karten von M mit $V := V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Dann sind $W_j := \gamma_j^{-1}(V) \subset U_j$ offen und $\varphi := \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1 : W_1 \to W_2$ ist ein Diffeomorphismus.

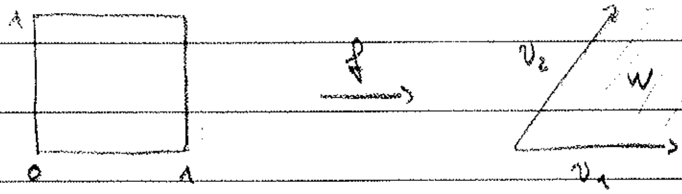


Bemerkung 11.6 Die Eigenschaft des letzten Satzes ist die Grundlage der Definition einer Mannigfaltigkeit (im Gegensatz zu hier betrachteten Untermannigfaltigkeit, welche einen Spezialfall einer Mannigfaltigkeit darstellt). $\diamond$

11.2 Maßtensor und Integration

Wir wollen nun über Flächen (bzw. Untermf.) integrieren, also insbesondere wollen wir Flächen messen. Sei $\gamma : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine Karte der Untermf. M.
Zur Motivation sei zunächst $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ linear, d.h. $f(z) = Az$ mit $A = (v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Dann ist $W := f([0,1]^m)$ das von den Spaltenvektoren $v_1, \dots, v_m$ aufgespannte Parallelepiped (Spat).





Die Fläche von W ist nach dem Transformationsatz gegeben durch

$$\mu(W) = \int_W 1 = \int_{[0,1]^m} 1 \cdot |\det f'(z)|\, dz = \det A.$$

Also ist

$$\mu(W)^2 = |\det A|^2 = \det A^T \cdot \det A = \det(A^T A)$$

$$= \det \left[\begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_m^T \end{pmatrix} (v_1, \dots, v_m) \right] = \det(\langle v_i, v_j \rangle_{1 \le i,j \le m}).$$

Das Volumen eines Würfels wird also mit dem Faktor $\sqrt{\det(\langle v_i, v_j \rangle_{1 \le i,j \le m})}$ multipliziert.
Jetzt zu γ: Lokal wird die Fläche (approximativ) durch die Vektoren $\gamma(u + he_i) - \gamma(u)$, $1 \le i \le m$, aufgespannt. Im Limes $h \to 0$ erhält man die partielle Ableitung $\partial_i \gamma(u) \in \mathbb{R}^n$. Mit $v_i := \partial_i \gamma(u)$ erhalten wir $\gamma'(u) = (v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Es scheint plausibel, dass das Volumen eines kleinen Würfels im $\mathbb{R}^m$ mit dem Faktor $\sqrt{\det(\langle v_i, v_j \rangle_{1 \le i,j \le m})} = \sqrt{\det(\gamma'(u)^T \gamma'(u))}$ multipliziert wird.

<u>Definition 11.7.</u> Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $\gamma: \mathbb{R}^m \supset U \to V \subset M$ eine Karte von M. Definiere die gramsche Matrix ("Maßtensor") von M bzgl. γ durch $G: U \to \mathbb{R}^{m \times m}$,

$$G(u) := (\gamma'(u))^T \gamma'(u) = (\langle \partial_i \gamma(u), \partial_j \gamma(u) \rangle)_{1 \le i,j \le m}.$$

Die gramsche Determinante $g: U \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$g(u) := \det G(u) = \det(\gamma'(u)^T \gamma'(u)).$$

<u>Lemma 11.8.</u> (Maßtensor bei Kartenwechsel). In der Situation von Satz 11.5 seien G_j die gramsche Matrix und g_j die gramsche Determinante von M bzgl. γ_j, $j = 1, 2$. Dann gelten

$$G_1(u) = (\varphi'(u))^T G_2(u) \varphi'(u), \quad u \in W_1,$$

$$g_1(u) = |\det \varphi'(u)|^2 g_2(u), \quad u \in W_1.$$

Aus der linearen Algebra benötigen wir das folgende Resultat.

<u>Lemma 11.9.</u> Seien $m \le n$, $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Für $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_m \le n$ sei $A_{i_1 \dots i_m}$ die Matrix, die aus den Zeilen $i_1, \dots, i_m$ von A besteht. Dann gilt

$$\det(A^T B) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_m} \det(A_{i_1 \dots i_m}) \det(B_{i_1 \dots i_m}).$$

<u>Korollar 11.10.</u> a) Seien $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $m \le n$. Dann gilt

$$\det(A^T A) = \sum_{i_1 < \dots < i_m} (\det A_{i_1 \dots i_m})^2.$$

b) Für die gramsche Determinante g von M bzgl. γ gilt

$$g(u) = \sum_{i_1 < \dots < i_m} (\det(\gamma'(u))_{i_1 \dots i_m})^2 > 0, \quad u \in U.$$

<u>Definition 11.11.</u> (Integral über Unterm f., Oberflächenintegral) Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $f: M \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

a) Sei $\gamma: \mathbb{R}^m \supset U \to \mathbb{R}^n$ eine Karte von M mit $f|_{M \setminus \gamma(U)} = 0$. Es sei g die gramsche Determinante von M bzgl. γ. Dann heißt f

integrierbar über M, falls $u \mapsto f(\gamma(u))\sqrt{g(u)}$ als Abbildung von U nach $\mathbb{R}$ über U integrierbar ist. In diesem Fall setze

$$\int_M f\,dS := \int_M f(x)\,dS(x) := \int_U f(\gamma(u))\sqrt{g(u)}\,du.$$

Das "S" kommt von "Surface" (Oberfläche). Manchmal schreibt man auch $\int_M f\,dA$ mit "A" für "Area").

b) Seien $\gamma_j : U_j \to \mathbb{R}^n$, $j = 1,\dots,k$, Karten von M, und für $V_j := \gamma_j(U_j)$ gelte $\bigcup_{j=1}^k V_j = M$. Die Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt (Riemann-) integrierbar über M, falls Funktionen $\varphi_j : M \to \mathbb{R}$, $j = 1,\dots,k$, existieren mit:

(i) $0 \le \varphi_j \le 1$,

(ii) $\varphi_j|_{M \setminus V_j} = 0$,

(iii) $\sum_{j=1}^k \varphi_j(x) = 1$ für $x \in M$,

(iv) $f\varphi_j$ ist integrierbar über M (im Sinne von a)).

In diesem Fall setze

$$\int_M f\,dS := \sum_{j=1}^k \int_M f\varphi_j\,dS.$$

Eine Familie $\{\varphi_j\}_{j=1}^k$ mit (i)-(iii) heißt eine Partition der Eins bzgl. $\{V_j\}_{j=1,\dots,k}$.

Bemerkung 11.12 a) Mit Hilfe von Lemma 11.8 und des Transformationssatzes kann man zeigen, dass $\int_M f\,dS$ wohldefiniert ist.

b) Seien M eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $\gamma : \mathbb{R}^m \supset U \to \mathbb{R}^n$ eine globale Karte von M, d.h., $\gamma(U) = M$. Falls $m = n$ gilt, so ist

$$\int_M 1\,dS = \int_U \sqrt{g(u)}\,du = \int_U \sqrt{\det(\gamma'(u)^T\gamma'(u))}\,du$$

$$\underset{\gamma'(u)\in\mathbb{R}^{n\times n}}{=} \int_U \sqrt{(\det \gamma'(u))^2} = \int_U |\det \gamma'(u)|\,du$$

$$\underset{\text{Transformationssatz}}{=} \int_M 1\,dx = \mu_n(M).$$

Falls $m = 1$ ist, so ist $\gamma'(u) \in \mathbb{R}^n$, d.h., $u \in U = (a,b) \subset \mathbb{R}$. Damit folgt

$$\int_M 1\,dS = \int_{(a,b)} \sqrt{\det\big(\underbrace{\gamma'(u)^T\gamma'(u)}_{\in\mathbb{R}}\big)}\,du = \int_a^b |\gamma'(u)|\,du = L([\gamma]).$$

Wir erhalten also die Bogenlänge zurück. ◊

<u>Definition 11.13</u> Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Eine Menge $A \subset M$ heißt <u>integrierbare Teilmenge</u> von M, falls χ_A integrierbar über M ist. In diesem Fall heißt $\mu_m(A) := \int_M \chi_A \, dS$ das m-dimensionale Volumen oder der m-dimensionale Flächeninhalt von A. Eine Funktion $f: M \to \mathbb{R}$ heißt <u>integrierbar</u> über $A \subset M$, falls $f\chi_A$ über M integrierbar ist. Setze $\int_A f \, dS := \int_M f \chi_A \, dS$.

<u>11.3 Anwendungen und Beispiele</u>

<u>Beispiel 11.14</u> (Rotationsflächen). Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f \in C^1(I;\mathbb{R})$ mit $f(t) > 0$ für $t \in I$. Setze $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in I,\ x^2+y^2 = f(z)^2\}$. Dann ist M eine zwei-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$, und

$$\gamma : I \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^3, \quad (t,\varphi) \mapsto \begin{pmatrix} f(t)\cos\varphi \\ f(t)\sin\varphi \\ t \end{pmatrix}$$

ist eine Karte von M mit Wertebereich $R(\gamma) = M \setminus \underbrace{(0,\infty) \times \{0\} \times I}_{\text{Nullmenge}}$.

Es gilt

$$\gamma'(t,\varphi) = \begin{pmatrix} f'(t)\cos\varphi & -f(t)\sin\varphi \\ f'(t)\sin\varphi & f(t)\cos\varphi \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ergibt sich

$$\gamma'(u)^T\gamma'(u) = \begin{pmatrix} f'(t)\cos\varphi & f'(t)\sin\varphi & 1 \\ -f(t)\sin\varphi & f(t)\cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'(t)\cos\varphi & -f(t)\sin\varphi \\ f'(t)\sin\varphi & f(t)\cos\varphi \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f'(t)^2+1 & 0 \\ 0 & f(t)^2 \end{pmatrix}$$

Daher erhalten wir $\sqrt{g(t,\varphi)} = f(t)\sqrt{f'(t)^2+1}$ und

$$\mu_2(M) = \int_{I \times (0,2\pi)} 1 \cdot \sqrt{g(t,\varphi)} \, d(t,\varphi) \overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^{2\pi} \int_I f(t)\sqrt{f'(t)^2+1} \, dt \, d\varphi$$

$$= 2\pi \int_I f(t)\sqrt{f'(t)^2+1} \, dt.$$ ◊

<u>Beispiel 11.15.</u> Wähle in Beispiel 11.14 $I = (-1,1)$ und $f(t) \equiv 1$. Wir erhalten den Mantel eines Zylinders mit Radius 1 und Höhe 2. Als Fläche ergibt sich $2\pi \int_{-1}^{1} 1 \, dt = 4\pi$. ◊

<u>Beispiel 11.16.</u> a) Seien $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen und $F \in C^1(U;\mathbb{R})$. Dann ist $M = \operatorname{graph} F \subset \mathbb{R}^n$ eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit globaler Karte $\gamma(u) = \binom{u}{F(u)}$. Es gilt

$$\gamma'(u) = \begin{pmatrix} I_{n-1} \\ F'(u) \end{pmatrix} \begin{matrix} \}\, n-1 \\ \}\, 1 \end{matrix}$$

und nach Korollar 11.10 b) ist

$$g(u) = 1 + \sum_{i=1}^{n} (\partial_i F(u))^2 = 1 + |\nabla F(u)|^2$$

Für integrierbares $f: M \to \mathbb{R}$ ist also

$$\int_M f\, dS = \int_{|u|<r} f\left(u, \sqrt{r^2 - |u|^2}\right) \frac{r}{\sqrt{r^2-|u|^2}}\, du$$

$$\underset{\substack{\text{Subst. } u = rv,\ du = r^{n-1} dv \\ \Phi: \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1},\ \det \Phi(v) = r^{n-1}}}{=} \int_{|v|<1} f\left(rv, r\sqrt{1-|v|^2}\right) r^{n-1} / \sqrt{1-|v|^2}\, dv \qquad \diamond$$

<u>Satz 11.17.</u> Sei $f \in \mathcal{R}_n$, und für alle $r > 0$ sei f integrierbar über $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\}$. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \int_0^\infty \left(\int_{|x|=r} f(x)\, dS(x) \right) dr.$$

<u>Satz 11.18</u> Seien $B_n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ die Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$ und $S_{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\} = \partial B_n$ die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\mu_{n-1}(S_{n-1}) = n \mu_n(B_n).$$

Speziell ist $\mu_1(S_1) = 2\pi$ (Kreislinie), $\mu_2(S_2) = 4\pi$.

<u>Satz 11.19</u> (Rotationssymmetrische Funktionen). Sei $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f(|x|)$ integrierbar. Dann ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|)\, dx = \mu_{n-1}(S_{n-1}) \int_0^\infty f(r)\, r^{n-1}\, dr.$$

<u>Beispiel 11.20</u> a) Seien $n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$ und $s < n$. Dann ist

$$\int_{|x|\leq 1} |x|^{-s}\, dx = \mu_{n-1}(S_{n-1}) \int_0^1 r^{n-1-s}\, dr = \mu_{n-1}(S_{n-1}) \frac{1}{n-s} < \infty.$$

b) Seien $n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$ und $s > n$. Dann ist

$$\int_{|x|\geq 1} |x|^{-s}\, dx = \mu_{n-1}(S_{n-1}) \int_1^\infty r^{n-1-s}\, dr = \mu_{n-1}(S_{n-1}) \frac{1}{s-n} < \infty. \qquad \diamond$$