2. Die Topologie des $\mathbb{R}^n$

2.1 $\mathbb{R}^n$ als normierter Vektorraum

Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Wir schreiben Vektoren des $\mathbb{R}^n$ in der Form $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Der transponierte Vektor x^T ist definiert durch $x^T = (x_1, \dots, x_n)$. Das (Standard-) Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i = x^T y.$$

Mit der Euklidischen Norm $|x| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ wird $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ zu einem normierten $\mathbb{R}$-Vektorraum. Wie bisher bezeichne

$$B(x,r) := \{ y \in \mathbb{R}^n \mid |x-y| < r \}$$

die offene Kugel im $\mathbb{R}^n$ $(x \in \mathbb{R}^n, r > 0)$.

Bemerkung 2.1 a) Seien $\{x^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge und $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$x^{(k)} \to x \ (k \to \infty) \iff |x^{(k)} - x| \to 0 \ (k \to \infty)$$
$$\iff \forall i \in \{1, \dots, n\}: |x_i^{(k)} - x_i| \to 0 \quad (k \to \infty)$$

b) Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann ist $\|\cdot\|_V \to \mathbb{R}$ stetig. $\Diamond$

Definition 2.2. a) ℓ_p-Norm auf $\mathbb{R}^n$: Für $x \in \mathbb{R}^n$ definiere $\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$ $(1 \le p < \infty)$ (ℓ_p-Norm) und $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ (Maximums-, ℓ_∞-Norm).

b) Definiere die ℓ_p-Räume $(1 \le p \le \infty)$ durch

$$\ell_p := \{ x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p\right)^{1/p} < \infty \}, \quad 1 \le p < \infty,$$
$$\ell_\infty := \{ x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : \|x\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| < \infty \}.$$

c) Sei $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$. Zu $f \in C(\bar{I}, \mathbb{C})$ definiere

$$\left.\begin{aligned} \|f\|_p &:= \left(\int_I |f|^p \, dx\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty \\ \|f\|_\infty &:= \sup_{x \in I} |f(x)| \end{aligned}\right\} L_p\text{-Norm}, \ 1 \le p \le \infty.$$

Satz 2.3. Seien $1 \le p \le \infty$ und $1 \le q \le \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (wobei $\frac{1}{\infty} = 0$ gesetzt wird). Seien $f, g \in C(\bar{I}, \mathbb{C})$.

a) Youngsche Ungleichung: Für alle $\alpha, \beta \ge 0$ und $1 < p < \infty$

gilt $\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$.

b) Höldersche Ungleichung: Es gilt für $x \in l_p, y \in l_q$
$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$
Analog folgt für $f, g \in C(\bar{I}, \mathbb{C})$ mit $\|f\|_p, \|g\|_q < \infty$
$$\int_I |f(x) g(x)|\, dx \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

c) Minkowski-Ungleichung: Es gilt für $x, y \in l_p$
$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$
Analog ist
$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$
für $f, g \in C(\bar{I}, \mathbb{C})$ mit $\|f\|_p, \|g\|_p < \infty$ erfüllt.

<u>Korollar 2.4</u> Folgende Räume sind normierte Räume: $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$, $(l_p, \|\cdot\|_p)$, $(C(\bar{I}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_p)$ mit $1 \leq p \leq \infty$.

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$. Durch $d(x,y) := |x-y|$ $(= \|x-y\|_2)$ wird eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$ definiert, und $(K, d|_K)$ ist wieder metrischer Raum. Nach Lemma 1.4 ist $(\mathbb{R}^n, d)$ vollständig. K heißt kompakt, falls jede offene Überdeckung $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, $U_i \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine endliche Teilüberdeckung $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ besitzt.

<u>Satz 2.5</u> (Bolzano-Weierstraß). Sei $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Dann existiert eine konvergente Teilfolge $\{x^{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$. Im folgenden verwenden wir (manchmal) die Bezeichnung
$$P x_j = x_j \quad \text{für } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ j \in \{1, \dots, n\}$$
(j-te Koordinate).

<u>Satz 2.6</u> (Heine-Borel). Für $K \subset \mathbb{R}^n$ sind äquivalent.

a) K ist kompakt.

b) K ist beschränkt und abgeschlossen.

c) Jede Folge $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ besitzt eine konvergente Teilfolge $\{x^{k_j}\} \subset K$ mit $x = \lim_{j\to\infty} x^{k_j} \in K$.

Korollar 2.7. Für $k \in \mathbb{N}$ seien $A_k \neq \emptyset$, A_k abgeschlossen, $A_k \subset \mathbb{R}^n$, $A_k \supset A_{k+1}$ und ein A_k beschränkt. Dann ist $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k \neq \emptyset$.

2.2 Stetige Funktionen in metrischen Räumen

Wiederholung: Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f: X \to Y$ heißt stetig in $x_0 \in X$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in X \cdot d_X(x, x_0) < \delta : \; d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

f heißt gleichmäßig stetig in X, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, x' \in X \; d_X(x, x') < \delta : \; d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

f heißt Lipschitz-stetig in X, falls

$$\exists c \geq 0 \; \forall x, x' \in X : \; d_Y(f(x), f(x')) \leq c \, d_X(x, x').$$

f ist stetig in $x_0 \in X$, falls

$$\forall \{x^k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X, \; x^k \to x_0 \; (k \to \infty) : \; f(x^k) \to f(x_0) \; (k \to \infty)$$

(folgenstetig).

X heißt zusammenhängend, falls

$$\nexists A, B \subset X : X = A \cup B, \; A, B \neq \emptyset, \; A \cap B = \emptyset, \; A, B \text{ offen}.$$

Satz 2.8. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume.

a) Seien $f \in C(X, Y)$ und $K \subset X$ kompakt. Dann sind $f(K)$ kompakt und $f|_K$ gleichmäßig stetig.

b) Seien X zusammenhängend und $f \in C(X, Y)$. Dann ist $f(X)$ zusammenhängend.

Korollar 2.9. Seien $f \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ und $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt.

a) $f(K)$ ist abgeschlossen und beschränkt.

b) Die Extrema werden angenommen, d.h. $\sup_{x\in K} f(x) =$

$\max\limits_{x\in K} f(x)$ und $\inf\limits_{x\in K} f(x) = \min\limits_{x\in K} f(x)$.

Definition 2.10. a) Eine stetige Abbildung $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt Weg (oder auch Kurve) in $\mathbb{R}^n$. Die Punkte $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$ heißen durch den Weg γ stetig verbunden.
b) $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt wegzusammenhängend, falls je zwei Punkte $m_1, m_2 \in M$ durch einen Weg in M stetig verbunden werden können, d.h.,

$$\exists\, a,b \in \mathbb{R},\ \gamma \in C([a,b];M) : \gamma(a) = m_1,\ \gamma(b) = m_2$$

Satz 2.11. Wegzusammenhängende Mengen sind zusammenhängend.

Bemerkung 2.12. Seien $f \in C(X;\mathbb{R})$ und X zusammenhängend. Dann ist $f(X)$ ein Intervall nach Satz 2.8 b). ↯

Lemma 2.13 Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Dann ist $\|\cdot\|: (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) \to \mathbb{R}$ stetig.

Satz 2.14. Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f: D \to \mathbb{R}^m$ stetig, injektiv. Ist D kompakt, so existiert f^{-1}, und f^{-1} ist stetig ($f^{-1}: R(f) \to \mathbb{R}^n$ mit $R(f) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y = f(x),\ x \in D\}$).

Satz 2.15 Alle Normen in $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent, d.h., falls $\|\cdot\|_{(1)}$ und $\|\cdot\|_{(2)}$ zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind, so existieren $C_1, C_2 > 0$ mit

$$C_1 \|x\|_{(1)} \le \|x\|_{(2)} \le C_2 \|x\|_{(1)} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Korollar 2.16. Seien $\|\cdot\|_{(1)}$ und $\|\cdot\|_{(2)}$ Normen in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt für $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$f \text{ ist stetig bezüglich } \|\cdot\|_{(1)} \Leftrightarrow f \text{ ist stetig bezüglich } \|\cdot\|_{(2)}.$$

<u>Bemerkung 2.17.</u> a) Sei $P_k: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_k$ ($k \in \{1, \dots, m\}$) die Projektion auf die k-te Koordinate. Dann gilt:

$$f \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) \Longleftrightarrow P_k f \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}), \ k = 1, \dots, m.$$

b) Die folgenden Abbildungen sind stetig:

$\pm: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\binom{x}{y} \mapsto x \pm y$, $\cdot: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\binom{x}{y} \mapsto xy$,

$:\ : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$, $\binom{x}{y} \mapsto \frac{x}{y}$

(denn die Abbildungen sind folgenstetig nach den Regeln über Grenzwerte),

$\max: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\binom{x}{y} \mapsto \max\{x, y\}$,

$\min: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\binom{x}{y} \mapsto \min\{x, y\}$

(denn für $x < y$ und $x^k \to x$ ($k \to \infty$), $y^k \to y$ ($k \to \infty$) gilt $x^k < y^k$ für k hinreichend groß, d.h., $y = \max\{x, y\} = \lim y^k = \lim\limits_{k \to \infty} \max\{x_k, y_k\}$. ◁

<u>2.3 Lineare Abbildungen in normierten Räumen</u>

<u>Definition 2.18.</u> Seien X und Y normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume. Eine Abbildung $A: X \to Y$ heißt <u>linear</u>, falls

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K} \ \forall x_1, x_2 \in X: A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A(x_1) + \alpha_2 A(x_2).$$

Falls $Y = \mathbb{K}$ gilt, so heißt eine lineare Abbildung auch <u>lineares Funktional</u>. Wir schreiben meist Ax statt $A(x)$. A heißt <u>beschränkt</u>, falls

$$\exists c > 0 \ \forall x \in X: \|Ax\|_Y \leq c\|x\|_X.$$

Wir definieren den Raum

$$L(X, Y) = \{A: X \to Y \mid A \text{ ist stetig und linear}\},$$

<u>Satz 2.19.</u> Seien X, Y normierte Räume und $A: X \to Y$ linear.

a) A ist stetig in X $\Longleftrightarrow$ Es gibt ein $x_0 \in X$, so dass A stetig

b) A ist stetig in x_0 ist. $\iff$ A ist beschränkt.

Definition 2.20. Seien X und Y normierte Räume. Die Abbildung

$$\|\cdot\| : L(X,Y) \to [0,\infty), \quad A \mapsto \|A\| = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y$$

heißt Operatornorm auf $L(X,Y)$.

Bemerkung 2.21. a) Für $A \in L(X,Y)$ gilt $\|A\| = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y$
$= \sup_{x \neq 0} \|Ax\|_X / \|x\|_X$.

b) $(L(X,Y), \|\cdot\|)$ ist normierter Raum. ◊

Beispiel 2.22. Seien $X = (C^1([0,1];\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$, $Y = (C([0,1];\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ und $A: X \to Y$ mit $f \mapsto Af = f'$. Dann ist A linear, aber nicht stetig, denn für $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, gelten $\|f\|_\infty = 1$, $(Af_n)(x) = nx^{n-1}$ und $\|Af_n\|_\infty = n$. Damit ist A unbeschränkt. ◊

Satz 2.23. Sei $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear. Dann ist A stetig.

Korollar 2.24. Die Koordinatenfunktionen $P_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_i$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, sind stetig.

Bemerkung 2.25. Sei $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear. Dann gilt $Ax = M_A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ mit einer Matrix $M_A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ($m\times n$-Matrix, d.h., m Zeilen und n Spalten). Die j-te Spalte von M_A ist die Darstellung von $Ae_j^{(n)} \in \mathbb{R}^m$ bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^m$, d.h.,

$$Ae_j^{(n)} = \sum_{k=1}^m a_{kj} e_k^{(m)} \text{ mit } \{e_1^{(n)}, \dots, e_n^{(n)}\} \text{ kanonische Basis in } \mathbb{R}^n,$$
$$\{e_1^{(m)}, \dots, e_m^{(m)}\} \text{ kanonische Basis in } \mathbb{R}^m,$$
$$M = ((a_{kj}))_{\substack{k=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

Im folgenden wird nicht zwischen A und M_A unterschieden, wobei die kanonische Basis zugrunde liegt. $\lozenge$