5. Lokale Umkehrbarkeit

5.1. Der Banachsche Fixpunktsatz

Sei (M,d) ein vollständiger, metrischer Raum.

Definition 5.1. Eine Abbildung $\Phi: M \to M$ heißt kontrahierend, falls es ein $c \in [0,1)$ gibt mit
$$\forall x,y \in M: d(\Phi(x),\Phi(y)) \leq c\, d(x,y).$$

Satz 5.2. (Banachscher Fixpunktsatz) Seien (M,d) vollständiger, metrischer Raum und $\Phi: M \to M$ kontrahierend. Dann besitzt Φ genau einen Fixpunkt $z \in M$, d.h., es gilt $\Phi(z)=z$. Definieren wir zu $x_0 \in M$ die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch $x_n := \Phi(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$, so gelten $x_n \xrightarrow{n\to\infty} z$ und
$$d(x_n,z) \leq \frac{c^n}{1-c}\, d(x_1,x_0) \qquad \text{(a-priori Abschätzung)}$$
$$d(x_n,z) \leq \frac{c}{1-c}\, d(x_n,x_{n-1}) \qquad \text{(a-posteriori Abschätzung)}$$

Bemerkung 5.3. Wegen
$$\begin{aligned} d(x_n,x_{n-1}) &= d(\Phi(x_{n-1}),\Phi(x_{n-2})) \leq c\, d(x_{n-1},x_{n-2}) \\ &\leq c^{n-1} d(x_1,x_0) \end{aligned}$$
ist die a-posteriori Schranke besser als die a-priori Schranke. $\Diamond$

5.2. Lokale Umkehrbarkeit

Satz 5.4. (Satz von der lokalen Umkehrbarkeit). Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U;\mathbb{R}^n)$, $a \in U$ und $\det f'(a) \neq 0$. Dann gibt es eine offene Umgebung V von a mit

a) $f|_V$ ist injektiv.

b) $f(V)$ ist offen.

c) $g := (f|_V)^{-1}: f(V) \to \mathbb{R}^n$ ist stetig differenzierbar, d.h., $f|_V: V \to f(V)$ ist ein Diffeomorphismus.

Bemerkung 5.5. Falls $f \in C^k(U;\mathbb{R}^n)$ mit $k \geq 1$ in der Situation von Satz 5.4, folgt auch $g \in C^k(f(V);\mathbb{R}^n)$, d.h., f ist ein C^k-Diffeomorphismus. Dies folgt aus der Darstellung der Ableitung nach Satz 3.17. ◊

Beispiel 5.6. Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \longmapsto \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix}$. Dann folgen

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{pmatrix}, \quad \det f'(x) = 4x_1^2 + 4x_2^2 \neq 0$$

für $x \neq 0$. f ist also für $x \neq 0$ lokal umkehrbar. Wegen $f(x) = f(-x)$ ist f nicht global umkehrbar. Für $x_1, x_2 > 0$ gilt nach dem Mittelwertsatz

$$f(x+h) = f(x) + \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(c^{(1)}) & \partial_2 f_1(c^{(1)}) \\ \partial_1 f_2(c^{(2)}) & \partial_2 f_2(c^{(2)}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

mit $c^{(1)} = x + \vartheta_1 h$, $c^{(2)} = x + \vartheta_2 h$, $\vartheta_1, \vartheta_2 \in (0,1)$. Wegen

$$\det A(c^{(1)}, c^{(2)}) := \det \begin{pmatrix} 2c_1^{(1)} & -2c_2^{(1)} \\ 2c_2^{(2)} & 2c_1^{(2)} \end{pmatrix} = 4(c_1^{(1)}c_1^{(2)} + c_2^{(1)}c_2^{(2)}) > 0$$

für alle $c^{(1)}, c^{(2)} \in (0,\infty)^2$ folgt

$$f(x+h) = f(x) \Rightarrow A(c^{(1)}, c^{(2)})\, h = 0 \Rightarrow h = 0.$$

Damit ist $f|_{(0,\infty)^2}$ injektiv und damit in diesem Bereich global umkehrbar. ◊

5.3 Der Satz über implizite Funktionen

Betrachte die Gleichung $f(x,u) := x + x^2 - u^2 = 0$. Diese Gleichung beschreibt x als Funktion von u in impliziter Weise, wobei x nicht unbedingt eindeutig gegeben sein muß. Hier ist $x^2 + x - u^2 = 0$, d.h., $x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + u^2}$.

Die Frage ist, wann diese Gleichungen zumindest lokal eindeutig auflösbar sind. Auch das geht nicht immer, z.B., $f(x,u) = 1 + x^2 + u^2 = 0$ hat keine (reelle) Lösung.

Im Mehrdimensionalen seien nun $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $f: \mathbb{R}^{n+m} \supset D$

$\to \mathbb{R}^n$ (das sind n Gleichungen für n Unbekannte, vgl. Lineare Algebra).
Im linearen Fall lautet die Gleichung $A\binom{x}{u} = 0$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times(n+m)}$.
Diese ist genau dann nach x eindeutig auflösbar, falls $\det A_1 \neq 0$, wobei $A = [A_1 \,\vdots\, A_2]$ mit $A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{n\times m}$ (denn $A\binom{x}{u} = A_1 x + A_2 u$).

Sei also $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $f: D \to \mathbb{R}^n$ und $(x,u) \mapsto f(x,u)$. Eine Funktion $\varphi: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ heißt Auflösung, falls $f(\varphi(u),u) = 0$ gilt. Wir zerlegen die Ableitung wie vorher die Matrix A

$$f'(x,u)\binom{h^{(1)}}{h^{(2)}} = (f^1)'(x,u)\, h^{(1)} + (f^2)'(x,u)\, h^{(2)},$$

$h^{(1)} \in \mathbb{R}^n$, $h^{(2)} \in \mathbb{R}^m$ und

$$(f^1)'(x,u) := \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x,u) & \dots & \partial_n f_1(x,u) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_n(x,u) & \dots & \partial_n f_n(x,u) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

$$(f^2)'(x,u) = \begin{pmatrix} \partial_{n+1} f_1(x,u) & \dots & \partial_{n+m} f_1(x,u) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{n+1} f_n(x,u) & \dots & \partial_{n+m} f_n(x,u) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}.$$

<u>Satz 5.7.</u> (Satz über implizite Funktionen). Seien $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$ offen, $f \in C^1(D;\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ mit $f(a,b) = 0$ und $\det (f^1)'(a,b) \neq 0$. Dann existiert eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^m$ von b und eine eindeutig bestimmte Abbildung $\varphi \in C^1(U;\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi(b) = a$ und

$$f(\varphi(u),u) = 0 \qquad (u \in U).$$

<u>Bemerkung 5.8.</u> Aus $f(\varphi(u),u) = 0$ folgt für $h^{(2)} \in \mathbb{R}^m$ durch Ableiten

$$0 = f'(\varphi(u),u)\begin{pmatrix} \varphi'(u)h^{(2)} \\ h^{(2)} \end{pmatrix} = \left[(f^1)'(\varphi(u),u)\,\varphi'(u) + (f^2)'(\varphi(u),u)\right] h^{(2)}.$$

Damit gilt

$$\varphi'(u) = -(f^1)'(\varphi(u),u)^{-1}\,(f^2)'(\varphi(u),u)$$ ◊

<u>Beispiel 5.9.</u> a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,u) = x + x^2 - u^2$. Es ist $f(0,0) = 0$, $(f^1)'(x,u) = 1 + 2x$, d.h., $(f^1)'(0,0) = 1$. Also ist $f(x,u)$ in einer Umgebung von $u = 0$ eindeutig nach x auflösbar,

und zwar durch $\varphi(u) = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + u^2}$.

(Beachte: $f(0,0) = 0$ und damit $\varphi(0) = 0$).

b) Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x = \binom{x_1}{x_2} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix} =: \binom{y_1}{y_2}$. Dann gilt $\det f'(x) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} = x_1 - x_2$. Seien $a, b \in \mathbb{R}^2$ mit $f(a) = b$ und $a = (a_1, a_2)^T$ mit $a_1 \neq a_2$. Dann existieren eine Umgebung $\mathcal{U}$ von b und ein $\varphi: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(\varphi(y)) = y, \quad y \in \mathcal{U}.$$

↯