7. Kurven und Flächen

Wiederholung: Ein Weg in $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $\gamma \in C([a,b];\mathbb{R}^n)$. Aber es gibt Wege, deren Bild eine ausgefüllte Fläche ist. Für die Analysis brauchen wir bessere Eigenschaften.

Definition 7.1. Ein Weg $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt *glatt*, falls γ stetig differenzierbar ist und an jeder Stelle $\gamma'(s) \neq 0$ gilt $(s \in (a,b))$. Ein Punkt $s \in [a,b]$ heißt *regulär*, falls $\gamma'(s) \neq 0$, und *singulär*, falls $\gamma'(s) = 0$. γ heißt *stückweise glatt*, falls γ aus endlich vielen glatten Wegen zusammengesetzt ist. Für glatte Wege heißt $t: (a,b) \to \mathbb{R}^n$, $t(s) = \gamma'(s)/|\gamma'(s)|$, der Tangenteneinheitsvektor.

Bei Wegen schreibt man manchmal $\dot{\gamma}(s)$ statt $\gamma'(s)$.

Beispiel 7.2. a) $\gamma: [0,2\pi] \to \mathbb{R}$, $\gamma(s) = \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \end{pmatrix}$ (Kreislinie).

b) $\gamma: [0,2\pi] \to \mathbb{R}$, $\gamma(s) = \begin{pmatrix} \cos(2s) \\ \sin(2s) \end{pmatrix}$ (auch Kreislinie, aber doppelt durchlaufen).

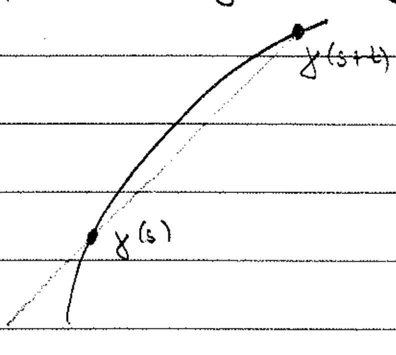
c) Schraubenlinie $\gamma(s) = (\cos s, \sin s, s)^T$, $s \in [0,\infty)$, ist glatt.

d) $\gamma: [-1,1] \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = \begin{cases} (-t^2, 0), & -1 \le t \le 0, \\ (0, t^2), & 0 \le t \le 1, \end{cases}$$

ist $C^1([-1,1];\mathbb{R}^2)$, aber nicht glatt, da $\gamma'(0) = 0$. γ ist aber stückweise glatt. $\Diamond$

Bemerkung 7.3. a) Beachte $\gamma'(s) = \lim_{t \searrow 0} \frac{\gamma(s+t) - \gamma(s)}{t}$, die von $\gamma(s+t) - \gamma(s)$ aufgespannte Gerade $\{x \in \mathbb{R}^n : x = \gamma(s) + r(\gamma(s+t) - \gamma(s)),\ r \in \mathbb{R}\}$ ist die Sekantenrichtung. Für $t \to 0$ erhalten wir die Tangente an der Stelle $\gamma(s)$.



b) Der Winkel φ zweier Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$

ist definiert durch $\cos\varphi = \frac{\langle x, y\rangle}{|x|\,|y|}$. Seien $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^n$ glatte Wege und $\gamma_1(s_0) = \gamma_2(t_0)$ (Schnittpunkt). Dann definiert

$$\cos\varphi = \frac{\langle \gamma_1'(s_0), \gamma_2'(t_0)\rangle}{|\gamma_1'(s_0)|\,|\gamma_2'(t_0)|}$$

den Schnittwinkel zwischen γ_1 und γ_2. ◊

<u>Definition 7.4</u> Zwei Wege $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\mu : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ heißen <u>äquivalent</u>, falls ein $\varphi : [c,d] \to [a,b]$, φ stetig, bijektiv, streng monoton wachsend, existiert mit $\mu = \gamma \circ \varphi$. Zwei (stückweise) glatte Wege heißen <u>äquivalent</u>, falls $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ stetig differenzierbar, bijektiv, $\varphi'(s) > 0$ $(s \in [c,d])$, existiert mit $\mu = \gamma \circ \varphi$. Die <u>Äquivalenzklassen</u> heißen orientierte (stückweise) glatte Kurven im $\mathbb{R}^n$. Schreibweise: $\Gamma = [\gamma]$.

Zwei Wege bzw. Kurven werden auf natürliche Weise zusammengesetzt: Seien $\Gamma_1 = [\gamma_1]$, $\Gamma_2 = [\gamma_2]$ zwei Kurven mit $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ und $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$. Dann sei die zusammengesetzte Kurve $\Gamma = [\gamma_2 * \gamma_1]$ erklärt durch

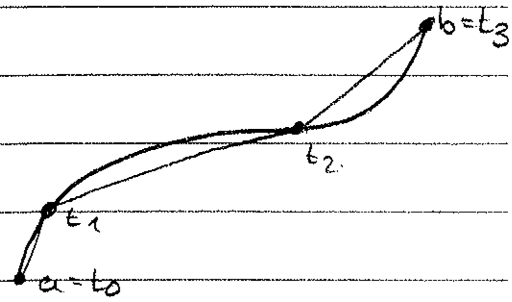
$$\gamma_2 * \gamma_1 : [a, b+d-c] \to \mathbb{R}^n, \quad (\gamma_2 * \gamma_1)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a,b], \\ \gamma_2(t-b+c), & t \in [b, b+d-c] \end{cases}$$

Wir schreiben $\Gamma = \Gamma_1 * \Gamma_2$ oder auch $\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_1$.

<u>Definition 7.5.</u> Sei $\Gamma = [\gamma]$ eine Kurve mit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Für eine Zerlegung $Z : a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ definiere $\ell(Z) := \sum_{j=1}^{k} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|$ (Länge des Polygonzuges). Die <u>Bogenlänge von Γ</u> ist definiert durch

$$L(\Gamma) := \sup\{\ell(Z) \mid Z \text{ Zerlegung von } \Gamma\}.$$

Γ heißt <u>rektifizierbar</u>, falls $L(\Gamma) < \infty$.



<u>Bemerkung 7.6.</u> $L(\Gamma)$ ist wohldefiniert, hängt also nicht von der Wahl des Repräsentanten ab. Denn falls $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\mu: [c,d] \to \mathbb{R}^n$ äquivalent sind mit $\mu = \gamma \circ \varphi$, so definiert jede Zerlegung $Z: c = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = d$ von μ eine Zerlegung $\tilde{Z}: a = \varphi(c) < \varphi(t_1) < \ldots < \varphi(t_k) = \varphi(d) = b$ von γ und umgekehrt. Wir schreiben auch $L(\gamma)$ statt $L([\gamma])$. ◊

<u>Satz 7.7.</u> Sei $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Dann ist $\Gamma = [\gamma]$ rektifizierbar und $L(\Gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$.

<u>Beispiel 7.8.</u> a) Strecke von x nach y: $\gamma(t) = x + t(y-x)$, $t \in [0,1]$,

$$L(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)|\, dt = \int_0^1 |y-x|\, dt = |y-x|.$$

b) $\gamma: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)^T$, $t \in [0,2\pi]$, (Kreislinie).

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \left| \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right| dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi.$$

(d.h., die früher schon betrachtete Bogenlänge). ◊

<u>Lemma 7.9.</u> a) Sei $\Gamma = \Gamma_2 * \Gamma_1$ (zusammengesetzte Kurve). Dann: $L(\Gamma) = L(\Gamma_1) + L(\Gamma_2)$.

b) Seien $\gamma_n: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ eine Folge stückweise glatter Wege und $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein stückweise glatter Weg mit

$$\|\gamma_n - \gamma\|_{C^1} := \sup_{t\in[a,b]} |\gamma_n(t) - \gamma(t)| + \sup_{t \in [a,b]} |\gamma_n'(t) - \gamma'(t)| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Dann gilt:

$$L(\gamma_n) \longrightarrow L(\gamma) \quad \text{für } n \to \infty.$$

c) Seien $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein glatter Weg, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $|Ax| = |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ (d.h., A ist eine Isometrie) und $y \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$L(A\gamma + y) = L(\gamma).$$

<u>Bemerkung 7.10.</u> a) Die Aussage b) des Lemmas gilt nicht bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$-Norm, d.h., es existieren stückweise glatte Wege γ_n, γ mit $\|\gamma_n - \gamma\|_\infty \to 0$ und $L(\gamma_n) \not\to L(\gamma)$.

b) Wir wissen, dass die Bogenlänge $L(\gamma)$ unabhängig von der Wahl des Repräsentanten γ von Γ ist. Besonders interessant sind Repräsentanten $\tilde{\gamma}$ mit $|\tilde{\gamma}'(s)| = 1$ für alle s. Diese heißen nach Bogenlänge parametrisierte Darstellung von Γ. Dazu seien $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ beliebiger Repräsentant und Γ glatt. Definiere $\varphi : [a,b] \to [0,L]$, $\varphi(s) = \int_a^s |\gamma'(t)|\,dt \; (= L(\gamma|_{[0,s]}))$. Wegen $|\gamma'(s)| > 0$ $(s \in [a,b])$ ist φ streng monoton wachsend, d.h., $\varphi^{-1} : [0,L] \to [a,b]$ existiert. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist $\varphi'(s) = |\gamma'(s)|$, d.h., für $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi^{-1}$ ist

$$|\tilde{\gamma}'(t)| = |\gamma'(\varphi^{-1}(t))(\varphi^{-1})'(t)| = \frac{|\gamma'(\varphi^{-1}(t))|}{\underbrace{|\varphi'(\varphi^{-1}(t))|}_{=\gamma'(\varphi^{-1}(t))}} = 1.$$

c) Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ glatt. Interpretiert man t als Zeit, so ist $\gamma'(t)$ als Geschwindigkeitsvektor zu verstehen. Sei nun γ nach Bogenlänge parametrisiert (d.h., $t \in [0, L(\gamma)]$). Dann gilt $|\gamma'(t)| = 1$, und damit ist $\gamma'(t)$ der Tangenteneinheitsvektor. Falls γ zweimal differenzierbar ist, heißt $\gamma''(t)$ der Krümmungsvektor (oder Beschleunigungsvektor) und $\kappa(t) = |\gamma''(t)|$ die Krümmung von γ an der Stelle $\gamma(t)$. Wegen $|\gamma'(t)| = 1$ folgt

$$0 = \frac{d}{dt}|\gamma'(t)|^2 = \frac{d}{dt}\langle \gamma'(t), \gamma'(t)\rangle = 2\langle \gamma'(t), \gamma''(t)\rangle,$$

d.h., Tangenten- und Krümmungsvektoren stehen aufeinander senkrecht. $\lozenge$

<u>Beispiel 7.11.</u> a) Strecke $\gamma(t) = x + t(y-x)$, $t \in [0,1]$, $\gamma'(t) = y - x$. Nach Bogenlänge parametrisiert: $\tilde{\gamma}(t) = x + \frac{t}{|y-x|}(y-x)$, $t \in [0, |y-x|]$. Krümmung: $\tilde{\gamma}''(t) = 0$, $\kappa(t) = 0$.

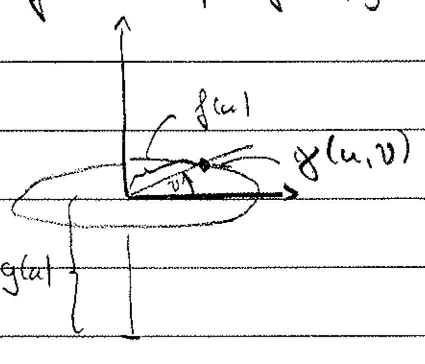
b) Kreis: $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)^T$, $t \in [0, 2\pi]$, $\gamma''(t) = (-\cos t, -\sin t)^T$, $\kappa(t) = 1$ (konstante Krümmung). $\lozenge$

<u>Definition 7.12.</u> a) Seien $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $m < n$. Eine Abbildung $\gamma: U \to \mathbb{R}^n$ heißt <u>Parameterdarstellung einer m-dimensionalen Fläche</u> in $\mathbb{R}^n$, falls γ stetig differenzierbar ist und $\operatorname{rk} \underbrace{\gamma'(u)}_{\in \mathbb{R}^{n \times m}} = m$ für alle $u \in U$.

Zwei solche Darstellungen $\gamma: U \to \mathbb{R}^n$, $\tilde{\gamma}: \tilde{U} \to \mathbb{R}^n$ heißen <u>äquivalent</u>, falls es einen Diffeomorphismus $\phi: \tilde{U} \to U$ gibt mit $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi$. Die Äquivalenzklassen $\Gamma = [\gamma]$ heißen <u>Flächen</u>. Falls $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi$ mit $\det \phi' > 0$, so besitzen γ und $\tilde{\gamma}$ die gleiche Orientierung.

b) Seien $\Gamma = [\gamma]$ eine m-dimensionale Fläche und $u \in U$ fest. Dann heißt $[T_u]$ mit $[T_u]: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $h \mapsto \gamma(u) + \gamma'(u) h$ der m-dimensionale <u>Tangentialraum</u> für γ an der Stelle $\gamma(u)$.

<u>Beispiel 7.13.</u> (Rotationsflächen). Sei $\gamma(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$ mit $f(u) > 0$, $(f'(u), g'(u)) \neq 0$ $(u \in U)$. Hier spielt $f(u)$ die Rolle des Radius in $\mathbb{R}^2$, $g(u)$ die Höhe, und v ist der Winkel. Es gilt



$$\gamma'(u,v) = \begin{pmatrix} f'(u)\cos v & -f(u)\sin v \\ f'(u)\sin v & f(u)\cos v \\ g'(u) & 0 \end{pmatrix},$$

d.h. $\operatorname{rk} \gamma'(u,v) = 2$ für alle (u,v).

$\Diamond$

Eine besonders einfache Parametrisierung einer m-dimensionalen Fläche ist gegeben durch

$$(*) \quad \begin{cases} \gamma_1(u) = u_1 \\ \vdots \\ \gamma_m(u) = u_m \\ \gamma_{m+1}(u) = f_1(u) \\ \vdots \\ \gamma_n(u) = f_{n-m}(u) \end{cases}$$

mit $f_i \in C^1(U;\mathbb{R})$, $1 \le i \le n-m$. Beachte, dass $\operatorname{rk} \gamma'(u) = m$ wegen

$$\gamma'(u) = \begin{pmatrix} I \\ f_1'(u) \\ \vdots \\ f_{n-m}'(u) \end{pmatrix} \begin{array}{l} \} \, m \text{ Zeilen} \\ \Big\} \, n-m \text{ Zeilen} \end{array}$$

<u>Satz 7.14.</u> Sei Γ eine m-dimensionale Fläche, $\Gamma = [\hat{\gamma}]$ mit $\hat{\gamma} : \hat{U} \to \mathbb{R}^n$. Sei $u_0 \in \hat{U}$ mit

$$\det \begin{pmatrix} \partial_1 \hat{\gamma}_1 & \dots & \partial_n \hat{\gamma}_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 \hat{\gamma}_n & \dots & \partial_n \hat{\gamma}_n \end{pmatrix} \Bigg|_{u=u_0} \neq 0.$$

Dann existieren eine Umgebung W von u_0 und eine zu $\hat{\gamma}|_W$ äquivalente Parametrisierung γ der Form $(*)$.

<u>Korollar 7.15.</u> In der Situation von Satz 7.14 lässt sich Γ lokal als Graph einer Funktion $\{(u, f(u)) : u \in U\}$ mit $f : \mathbb{R}^m \supset U \to \mathbb{R}^{n-m}$, f stetig differenzierbar, darstellen. Ebenso lässt sich Γ als Nullstellenmenge $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$ mit $g : \mathbb{R}^n \supset W \to \mathbb{R}^{n-m}$, g stetig differenzierbar, darstellen.