## 8. Riemann-Integral und Jordan-Inhalt

Das Integral wurde in Analysis I in zwei Schritten definiert: Zuerst für Treppenfunktionen (da ist klar, was das Integral sein soll) und dann durch Grenzübergang (bzgl. der $\|\cdot\|_\infty$-Norm) für Regelfunktionen. Der Zugang im $\mathbb{R}^n$ ist ähnlich, aber komplizierter: In $\mathbb{R}$ sind Treppenfunktionen auf Intervallen definiert, jetzt kann der Bereich komplizierter sein. Was ist das Integral der Funktion, die konstant 1 ist für $\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$? Das ist eine sehr einfache Treppenfunktion aber ihr Integral (Fläche des Kreises) ist nicht klar.

Wir fangen wieder mit ($n$-dimensionalen) Intervallen an. Zu $a, b \in \mathbb{R}^n$ sei $(a,b] := \bigtimes_{j=1}^n (a_j, b_j] = \{x \in \mathbb{R}^n : a_j < x \leq b_j,\ 1 \leq j \leq n\}$. Beachte, dass $(a,a] = \emptyset$. Sei

$$\mathbb{I}_n := \{(a,b] : a, b \in \mathbb{R}^n\}$$

das System der Intervalle. Der Inhalt eines Intervalls ($\mathbb{R}^2$: Fläche, $\mathbb{R}^3$: Volumen) ist gegeben durch

$$\mu(A) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j) \qquad \text{für } A = (a,b] \neq \emptyset$$

und $\mu(\emptyset) = 0$. Die zu $\mathbb{I}_n$ gehörenden Treppenfunktionen sind definiert als

$$\mathcal{T}_n := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid f = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{A_i},\ \alpha_i \in \mathbb{R}, A_i \in \mathbb{I}_n, k \in \mathbb{N}\}.$$

Das Integral einer Treppenfunktion $f = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{A_i} \in \mathcal{T}_n$ ist gegeben durch

$$\int f := \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(A_i).$$

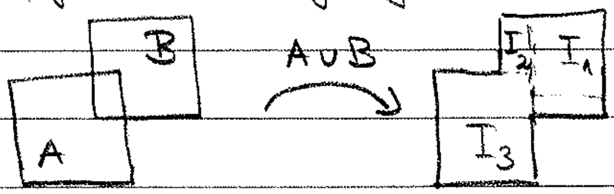
<u>Bemerkung 8.1.</u> Der gesamte Integralbegriff basiert auf einigen elementaren Eigenschaften von $\mathbb{I}_n$ und $\mu$. Dazu verwenden wir folgende Schreibweise:

$$A = A_1 \dot\cup A_2 :\Longleftrightarrow A = A_1 \cup A_2,\ A_1 \cap A_2 = \emptyset \quad \text{(disjunkte Vereinigung)}$$

$$A = \dot\bigcup_{i=1}^k A_i :\Longleftrightarrow A = \bigcup_{i=1}^k A_i,\ A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j)$$

Der Durchschnitt zweier Intervalle $A, B \in \mathbb{I}_n$ liegt wieder in $\mathbb{I}_n$. Aber $A \cup B \notin \mathbb{I}_n$ und $A \setminus B \notin \mathbb{I}_n$ (i.a.). Durch Verfeinerung von $A$

und $B$ können wir allerdings sehen, dass $A \cup B$ und $A \setminus B$ immer eine disjunkte Vereinigung von endlich vielen Intervallen aus $\mathbb{I}_n$ ist




$$A \cup B = \dot{\bigcup_{i=1}^{3}} I_i$$

Wir definieren daher:

$$\mathbb{A}_n = \{ A \subset \mathbb{R}^n \mid \exists k \in \mathbb{N}\ \exists A_1, \dots, A_k \in \mathbb{I}_n : A = A_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A_k \}$$

Es gelten

$$A, B \in \mathbb{I}_n \Rightarrow A \cap B \in \mathbb{I}_n,\ A \setminus B \in \mathbb{A}_n,\ A \cup B \in \mathbb{A}_n$$

und

$$A, B \in \mathbb{A}_n \Rightarrow A \cap B \in \mathbb{A}_n,\ A \setminus B \in \mathbb{A}_n,\ A \cup B \in \mathbb{A}_n.$$

<u>Lemma 8.2.</u> a) $\mu : \mathbb{I}_n \to [0, \infty)$ ist Inhalt, d.h., falls $A = \dot{\bigcup}_{j=1}^{k} A_j$ mit $A, A_j \in \mathbb{I}_n$, so ist $\mu(A) = \sum_{j=1}^{k} \mu(A_j)$.

b) Die Abbildung $J_n \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int f$ ist wohldefiniert und linear.

<u>Bemerkung 8.3.</u> a) $f \in J_n$, $f \geq 0 \Rightarrow \int f \geq 0$ (Betrachte eine disjunkte $f = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{A_j}$. Dann sind alle $\alpha_j \geq 0$.).

b) $f, g \in J_n$, $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$ (wegen $g - f \geq 0$).

c) $f \in J_n \Rightarrow |f| \in J_n$ und $|\int f| \leq \int |f|$ (denn $|f| = \sum_{j=1}^{k} |\alpha_j| \chi_{A_j}$ für eine disjunkte Darstellung und $\pm f \leq |f|$).

d) $f, g \in J_n \Rightarrow \max\{f, g\} \in J_n$, $\min\{f, g\} \in J_n$, $f \cdot g \in J_n$ (alles klar für eine Darstellung von $f$ und $g$ mit gleichen Mengen $A_i$). ◁

<u>Definition 8.4.</u> Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{ x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0 \}}$$

der <u>Träger</u> (Support) von $f$. Sei $\mathcal{J}_n := \{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid \operatorname{supp} f \text{ kompakt} \}$.

Für $f \in \mathcal{J}_n$ heißen

$$\overline{J} f := \inf \{ \int \varphi : \varphi \in J_n, \varphi \geq f \}$$

das Oberintegral und

$$\underline{\int} f := \sup\{\int \varphi : \varphi \in \mathcal{T}_n, \varphi \leq f\}$$

das Unterintegral von $f$. $f$ heißt Riemann-integrierbar, falls

$$\overline{\int} f = \underline{\int} f =: \int f$$

gilt. Setze $\mathcal{R}_n := \{f \in \mathcal{F}_n : f \text{ Riemann-integrierbar}\}$.

Satz 8.5. a) $f \leq g \Rightarrow \overline{\int} f \leq \overline{\int} g$ $(f, g \in \mathcal{F}_n)$ (monoton),
b) $|\int \varphi| \leq \overline{\int} |\varphi|$ $(\varphi \in \mathcal{T}_n)$,
c) $\overline{\int} \alpha f = \alpha \overline{\int} f$ $(\alpha \geq 0, f \in \mathcal{T}_n)$ (positiv homogen),
d) $\overline{\int} (f+g) \leq \overline{\int} f + \overline{\int} g$ $(f, g \in \mathcal{F}_n)$ (subadditiv)
e) $|\overline{\int} f - \overline{\int} g| \leq \overline{\int} |f-g|$ $(f, g \in \mathcal{F}_n)$.

Satz 8.6. Für $f \in \mathcal{F}_n$ sind äquivalent:
(i) $f$ ist Riemann-integrierbar, d.h., $\overline{\int} f = \underline{\int} f$.
(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \varphi \in \mathcal{T}_n : \overline{\int} |f - \varphi| < \varepsilon$
(iii) Es existiert eine Folge $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{T}_n$ mit $\overline{\int} |f - \varphi_k| \xrightarrow{k \to \infty} 0$.
In diesem Fall gilt für jede Folge wie in (iii):

$$\int f = \lim_{k \to \infty} \int \varphi_k$$

Korollar 8.7. $\mathcal{R}_n \subset \mathcal{F}_n$ ist ein linearer Untervektorraum. Die Abbildung $f \mapsto \int f$ ist linear von $\mathcal{R}_n$ nach $\mathbb{R}$. Falls $f, g \in \mathcal{R}_n$, so ist auch $f \cdot g \in \mathcal{R}_n$, $\max\{f, g\} \in \mathcal{R}_n$, $\min\{f, g\} \in \mathcal{R}_n$.

Wir wissen nun, welche Funktionen integrierbar sind. Daraus lesen wir ab, welche Mengen messbar sind.

Definition 8.8. Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt (Jordan-)messbar, falls $\chi_A$ integrierbar ist. Setze $\mathbb{M}_n = \{A \in \mathbb{R}^n : A \text{ ist messbar}\}$. Für $A \in \mathbb{M}_n$ heißt $\mu(A) := \int \chi_A$ der (Jordan-)Inhalt von $A$.

<u>Bemerkung 8.9.</u> a) Offensichtlich $\mathbb{I}_n \subset \mathbb{A}_n \subset \mathbb{M}_n$, und auf $\mathbb{I}_n$ stimmt Definition 8.8 mit der ursprünglichen Definition überein.

b) $\mu: \mathbb{M}_n \to [0,\infty)$ ist Inhalt, d.h., $\mu(A \dot\cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Denn:

$$\mu(A \dot\cup B) = \int \chi_{A\dot\cup B} = \int \chi_A + \chi_B = \int \chi_A + \int \chi_B$$
$$= \mu(A) + \mu(B)$$ ◊

<u>Satz 8.10.</u> Für eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$M \in \mathbb{M}_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists A, B \in \mathbb{A}_n:\ A \subset M \subset B,\ \mu(B \setminus A) < \varepsilon.$$

<u>Bemerkung 8.11.</u> a) Für $A \in \mathbb{A}_n$ ist $\mathring{A}, \bar{A} \in \mathbb{M}_n$ mit $\mu(\bar{A}) = \mu(\mathring{A}) = \mu(A)$. Approximiere nämlich wie folgt

$$\bigtimes_{j=1}^n (a_j, b_j] \subset \bigtimes_{j=1}^n [a_j, b_j] \subset \bigtimes_{j=1}^n (a_j - \varepsilon, b_j] \text{ bzw.}$$
$$\bigtimes_{j=1}^n (a_j, b_j - \varepsilon) \subset \bigtimes_{j=1}^n (a_j, b_j) \subset \bigtimes_{j=1}^n (a_j, b_j],$$

b) Genauso sieht man, dass in Satz 8.10 die Mengen $A$ bzw. $B$ durch $\bar{A}, \mathring{A}$ bzw. $\bar{B}$ oder $\mathring{B}$ ersetzt werden kann. ◊

<u>Korollar 8.12.</u> Für $M \in \mathbb{M}_n$ ist $\mu(M) = \sup\{\mu(A) : A \subset M,\ A \in \mathbb{A}_n\}$ $= \inf\{\mu(A) : M \subset A,\ A \in \mathbb{A}_n\}$.

<u>Definition 8.13:</u> Eine Funktion $f \in \mathcal{J}_n$ heißt <u>Nullfunktion</u>, falls $\overline{\int}|f| = 0$ ($\Leftrightarrow f \in \mathcal{R}_n$ mit $\int |f| = 0$). Eine Menge $N \subset \mathbb{R}^n$ heißt <u>Nullmenge</u>, falls $N$ beschränkt ist und $\chi_N$ Nullfunktion ist ($\Leftrightarrow N \in \mathbb{M}_n, \mu(N) = 0$).

<u>Lemma 8.14.</u> a) $f$ beschränkt, supp $f$ Nullmenge $\Rightarrow f$ Nullfunktion.

b) $f$ Nullfunktion $\Rightarrow \exists$ Nullmengen $N_k, k \in \mathbb{N}$, mit
$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\} \subset \bigcup_{k=1}^\infty N_k.$$

<u>Satz 8.15.</u> Für $M \subset \mathbb{R}^n$ gilt $M \in \mathbb{M}_n \Leftrightarrow M$ beschränkt und $\partial M$

Nullmenge.

Satz 8.16. Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $x \notin M$. Seien $f$ beschränkt und $f|_M$ stetig. Dann ist $f$ integrierbar.

Definition 8.17. (Induktive Definition). Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt Normalbereich, falls

(i) $n=1$: $M = [a,b]$ mit $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$.

(ii) $n>1$: Es existieren ein Normalbereich $N \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und $\varphi, \psi: N \to \mathbb{R}$ stetig mit $\varphi \leq \psi$, sodass

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : y = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in N,\ x_n \in [\varphi(y), \psi(y)]\}.$$

Beispiel 8.18. $\overline{B_r(0)} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq r^2\} \subset \mathbb{R}^3$ ist ein Normalbereich; denn:

$$N_1 = [-r, r],\ N_2 = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in N_1,\ x_2 \in [-\sqrt{r^2-x_1^2}, \sqrt{r^2-x_1^2}]\}$$

$$N_3 = \overline{B_r(0)} = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1,x_2) \in N_2,$$
$$x_3 \in [\underbrace{-\sqrt{r^2-x_1^2-x_2^2}}_{\varphi(y)}, \underbrace{\sqrt{r^2-x_1^2-x_2^2}}_{\psi(y)}]\}$$
$$y = (x_1, x_2):$$

Satz 8.19. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ ein Normalbereich. Dann ist $M$ kompakt und messbar.