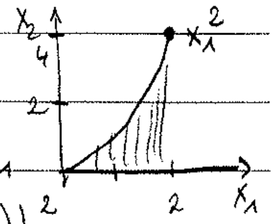
9. Sätze zur Integration

9.1 Der Satz von Fubini

Definition 9.1. $D \subset \mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}$ und $B \subset D$. Dann heißt f integrierbar über B, falls $f\chi_B \in \mathcal{R}_n$. In diesem Fall setze

$$\int_B f(x)\,dx := \int_B f := \int f\chi_B.$$

Die Berechnung von Integralen erfolgt fast immer in Form iterierter Integrale.



Beispiel 9.2. $M = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in [0,2],\ x_2 \in [0, x_1^2]\}$.

$$\int_M |x|^2\,dx = \int_M x_1^2 + x_2^2\,dx \overset{(*)}{=} \int_0^2 \left(\int_0^{x_1^2} (x_1^2 + x_2^2)\,dx_2\right) dx_1$$
$$= \int_0^2 (x_1^2 x_2 + x_2^3/3)\Big|_0^{x_1^2} dx_1 = \int_0^2 x_1^4 + x_1^6/3\,dx_1 = \left(\frac{x_1^5}{5} + \frac{x_1^7}{21}\right)\Big|_0^2$$
$$= 32/5 + 128/21 \approx 12.5.$$

Die Frage ist, ob (*) erlaubt ist. ◇

Allgemein seien $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x = (y,z)$, $y = (x_1, \dots, x_\ell)^T \in \mathbb{R}^\ell$, $z = (x_{\ell+1}, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^k$ mit $k + \ell = n$.

Bemerkung 9.3 a) Sei $f \in \mathcal{T}_n$. Dann ist $f(y,\cdot) \in \mathcal{T}_k$. Für $\tilde f(y) := \int_{\mathbb{R}^k} f(y,z)\,dz$ gelten $\tilde f \in \mathcal{T}_\ell$ und $\int_{\mathbb{R}^\ell} \tilde f = \int_{\mathbb{R}^n} f$. Es reicht, $f = \chi_A$ mit $A \in \mathcal{I}_n$ zu betrachten.

b) Sei $f \in \mathcal{F}_n$ (d.h., $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\operatorname{supp} f$ kompakt) mit $\overline{\int} |f| < \infty$. Für $y \in \mathbb{R}^\ell$ setze $\tilde f(y) := \overline{\int}_{\mathbb{R}^k} |f(y,z)|\,dz$. Dann ist $\tilde f \in \mathcal{F}_\ell$ mit

$$\overline{\int}_{\mathbb{R}^n} \tilde f(y)\,dy \le \overline{\int} |f(x)|\,dx.$$

Denn: Sei $|f| \le h \in \mathcal{T}_n$. Dann ist $\tilde f(y) = \overline{\int}_{\mathbb{R}^k} |f(y,z)|\,dz \le \underbrace{\int_{\mathbb{R}^k} h(y,z)\,dz}_{= \tilde h(y) \in \mathcal{T}_\ell} < \infty$, d.h., $\overline{\int}_{\mathbb{R}^\ell} \tilde f \le \int_{\mathbb{R}^\ell} \tilde h(y) = \int_{\mathbb{R}^n} h$. ◇

Satz 9.4 (Satz von Fubini für Riemann-Integrale). Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann gelten:

a) Für $I(y) = \inf\{\overline{\int}_{\mathbb{R}^k} |f(y,z) - h(z)|\,dz : h \in \mathcal{T}_k\}$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^\ell} |I(y)|\,dy = 0.$$

b) Es existieren Nullmengen $N_j \subset \mathbb{R}^\ell$ mit $f(y,\cdot) \in R_k$ für $y \in \mathbb{R}^\ell \setminus \bigcup_{j=1}^\infty N_j$.

c) Setze

$$g(y) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^k} f(y,z)\,dz, & \text{falls } f(y,\cdot) \in R_k, \\ \int_{\mathbb{R}^k} h_y(z)\,dz, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $h_y \in J_k$ mit $\int_{\mathbb{R}^k} |f(y,\cdot) - h_y| < 2I(y)$. Dann ist $g \in R_\ell$ und $\int_{\mathbb{R}^\ell} g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx$.

<u>Korollar 9.5.</u> Sei $f \in R_n$ und für alle $y \in \mathbb{R}^k$ sei $f(y,\cdot) \in R_\ell$. Dann ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y,z)\,d(y,z) = \int_{\mathbb{R}^\ell}\left(\int_{\mathbb{R}^k} f(y,z)\,dz\right)dy.$$

<u>Korollar 9.6</u> (Integration über Normalbereiche). Sei $M \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, Normalbereich. Seien N, φ, ψ wie in Definition 8.16. Sei f mit $\operatorname{supp} f \subset M$ und $f|_M$ stetig. Dann gilt mit $y = (x_1, \dots, x_{n-1})$:

$$\int_M f(x)\,dx = \int_N \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(y, x_n)\,dx_n\right) dy.$$

<u>Beispiel 9.7</u> (Trägheitsmoment der Kugel bezüglich der z-Achse). Betrachte die Kugel $K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq r\}$. Zu bestimmen ist $\int_K x^2+y^2\,d(x,y,z)$. Es ist

$$\int_K x^2\,d(x,y,z) = \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \int_{-\sqrt{r^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} x^2\,dz\,dy\,dx$$

$$= 8\int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2-x^2-y^2}\,dy\,dx$$

$$\underset{\substack{y=\sqrt{r^2-x^2}\sin t \\ dy = \sqrt{r^2-x^2}\cos t\,dt}}{=} 8\int_0^r x^2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2-x^2-(r^2-x^2)\sin^2 t}\,\sqrt{r^2-x^2}\cos t\,dt\,dx$$

$$= 8\int_0^r x^2 \int_0^{\pi/2} (r^2-x^2)\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt\,dx$$

$$= 8\int_0^r x^2(r^2-x^2)\underbrace{\left(\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt\right)}_{=\pi/4} dx = 2\pi\int_0^r x^2(r^2-x^2)\,dx$$

$$= 2\pi\left(\frac{x^3 r^2}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_{x=0}^{x=r} = 2\pi\left(\frac{r^5}{3} - \frac{r^5}{5}\right) = \frac{2\pi}{15} r^5 (5-3)$$

$$= \frac{4\pi}{15} r^5.$$

Wegen $\int_K x^2\,d(x,y,z) = \int_K y^2\,d(x,y,z)$ erhalten wir

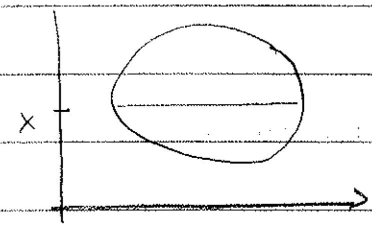
$$\int_K x^2+y^2\,d(x,y,z) = \frac{8}{15}\pi r^5$$

◇

Satz 9.8 (Prinzip von Cavalieri) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Für alle $x \in \mathbb{R}$ sei der Schnitt

$$M_x := \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : (x,y) \in M\} \subset \mathbb{R}^{n-1}$$

messbar. Dann ist $\mu_n(M) = \int_{\mathbb{R}} \mu_{n-1}(M_x)\,dx$.



Beachte dabei, dass aus $M \in \mathbb{M}_n$ folgt: M beschränkt. Somit ist $M_x = \emptyset$ für $|x| \geq c$ mit c geeignet. Man setzt dann

$$\int_{\mathbb{R}} \mu_{n-1}(M_x)\,dx := \int_{-c}^{c} \mu_{n-1}(M_x)\,dx.$$

Beispiel 9.9. a) Kreisfläche: $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leq r\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-r,r],\ y \in [-\sqrt{r^2-x^2}, \sqrt{r^2-x^2}]\}$. Dann gilt

$$\mu_2(M) = \int_{-r}^{r} \mu_1([-\sqrt{r^2-x^2}, \sqrt{r^2-x^2}])\,dx = 4\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx$$
$$= 4\int_0^{\pi/2} r^2 \cos^2 t\,dt = \pi r^2$$

$x = r\sin t$, $t \in [0, \pi/2]$
$dx = r\cos t\,dt$

b) Volumen der Kugel: $\mathbb{R}^3 \supset M := \overline{K_r(0)} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq r\}$.
Für $x \in [-r,r]$ ist $M_x = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : y^2+z^2 \leq r^2-x^2\}$. Also

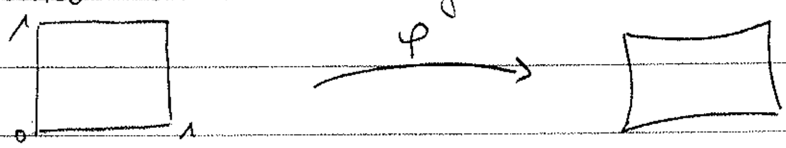
$$\mu(M_x) = \mu_2(M_x) = \pi(r^2-x^2) \qquad \text{(nach Teil a))}.$$

Damit

$$\mu(M) = \int_{-r}^{r} \mu(M_x)\,dx = \int_{-r}^{r} \pi(r^2-x^2)\,dx = \pi\left(r^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x=-r}^{x=r}$$
$$= \pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3} - \left(-r^3 + \frac{r^3}{3}\right)\right) = \pi\left(\frac{2}{3}r^3 - \left(-\frac{2}{3}r^3\right)\right)$$
$$= \frac{4\pi}{3} r^3. \qquad \Diamond$$

9.2. Der Transformationssatz

Wir wissen jetzt zwar, wie Mengeninhalte gemessen und Integrale berechnet werden. Aber eine wichtige Frage bleibt: Wie verhält sich das Volumen bzw. das Integral bei Abbildungen?



Vergleiche die Substitutionsregel in $\mathbb{R}$: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(z)) \cdot \varphi'(z)\,dz$.

Satz 9.10. Seien $M \in \mathbb{M}_n$ und f integrierbar über M. Dann ist $\operatorname{graph} f = \{(x, f(x)) : x \in M\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Nullmenge.

Lemma 9.11. Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $f : M \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty \leq L \|x - y\|_\infty \quad \forall x, y \in M,$$

d.h., f ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L > 0$. Dann gilt

$$\bar{\int} \chi_{f(M)} \leq L^n \bar{\int} \chi_M.$$

Falls M Nullmenge ist, so auch $f(M)$.

Lemma 9.12. Seien $G \in \mathbb{M}_n$ offen, $f : \bar{G} \to \mathbb{R}^n$ (Lipschitz-stetig), $f \in C^1(G; \mathbb{R}^n)$ mit $\det f'(x) \neq 0$ $(x \in G)$. Dann gelten:

a) $H := f(G)$ ist offen, $H \in \mathbb{M}_n$, $\bar{H} = f(\bar{G})$, $\partial H \subset f(\partial G)$.

b) Falls f injektiv ist, folgt $\partial H = f(\partial G)$.

c) $A \subset \bar{G}$, $A \in \mathbb{M}_n \Rightarrow f(A) \in \mathbb{M}_n$.

Das letzte Lemma sagt uns, dass geeignete Abbildungen messbare Mengen wieder auf messbare abbilden. Wie sich die entsprechenden Integrale berechnen lassen, ist relativ kompliziert zu beweisen.

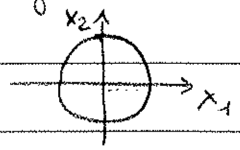
Satz 9.13. (Transformationssatz) Seien $H, G \in \mathbb{M}_n$ offen, $\Phi \in C^1(\bar{H}; \mathbb{R})$ mit $\Phi|_H : H \to G$ Diffeomorphismus. Dann folgt: Falls gilt $f \in C(\bar{G}; \mathbb{R})$, so ist $z \longmapsto f(\Phi(z)) |\det \Phi'(z)|$ auf $\bar{H}$ integrierbar und

$$\int_{\bar{G}} f(x)\, dx = \int_{\bar{H}} f(\Phi(z)) |\det \Phi'(z)|\, dz.$$

Beachte den Unterschied zum eindimensionalen Fall. Dort fehlt der Betragsstrich. Im $\mathbb{R}^n$ gibt es keinen Unterschied zwischen $\int_a^b \ldots$ und $\int_b^a$, nur $\int_{[a,b]}$.

Beispiel 9.14 (Polarkoordinaten). Sei $\Phi : [0, \infty) \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$,

$(r,\varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi)^T$. Wir wissen schon, dass $|\det \Phi'(r,\varphi)| = r$ gilt für $r>0$. Gesucht ist die Kreisfläche $\mu(K)$ mit $K = \{x\in\mathbb{R}^2 \mid |x|\le R\}$. Setze $G := \{x\in\mathbb{R}^2 : |x|<R,\ x_1 \notin [0,\infty)\}$ (geschlitzter Kreis) und $H := (0,R)\times(0,2\pi)$, $f\equiv 1$.



$$
\begin{aligned}
\mu(K) &= \int_{\overline{G}} f(x)\,dx \\
&= \int_{\overline{H}} f(\Phi(r,\varphi))\,|\det \Phi'(r,\varphi)|\,d(r,\varphi) \\
&= \int_0^R \int_0^{2\pi} 1\cdot r\,d\varphi\,dr = \int_0^R 2\pi r\,dr = \pi r^2\Big|_{r=0}^{r=R} = \pi R^2. \qquad \diamondsuit
\end{aligned}
$$

Beispiel 9.15. Wir erhalten

$$
\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x_1^2-x_2^2}\,dx \underset{\text{Polarkoordinaten}}{=} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-r^2}\, r\,d\varphi\,dr = 2\pi \int_0^\infty r e^{-r^2}\,dr = 2\pi\left(-\tfrac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Big|_{r=0}^{r=\infty} = 2\pi\cdot\tfrac{1}{2}e^0 = \pi.
$$

Aber es gilt auch

$$
\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x_1^2-x_2^2}\,dx \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2}\,dx_1\right) e^{-x_2^2}\,dx_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\,dt\right)^2.
$$

Also $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$. Insbesondere folgt für die Dichte der Normalverteilung

$$
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt = 1.
$$

Denn

$$
2\pi \int_0^\infty r e^{-r^2/2}\,dr = 2\pi\left(-e^{-r^2/2}\right)\Big|_{r=0}^{r=\infty} = 2\pi \qquad \diamondsuit
$$