1. Existenz und Eindeutigkeitssätze

Typische Gleichungen in der Modellierung sind

$y' = \alpha y$ (radioaktiver Zerfall $[\alpha < 0]$, Geldmenge bei kontinuierlicher Verzinsung $[\alpha > 0]$)

oder (bis auf Konstanten)

$y'' + y = 0$ (ungedämpftes Pendel).

Genauer:

$$y'(t) = \alpha y(t) \qquad (t \in \mathbb{R}) \qquad (1.1)$$

Gesucht ist eine Funktion $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche die Gleichung (1.1) an jeder Stelle t erfüllt. Gleichung (1.1) wird (gewöhnliche) Differentialgleichung (Dgl.) genannt. Varianten sind:

- y ist nur auf einem Teilintervall $I \subset \mathbb{R}$ definiert.
- y hat Werte im $\mathbb{R}^n$.
- y ist komplexwertig, d.h., $y: I \to \mathbb{C}^n$.

Wir müssen für (1.1) fordern, dass y differenzierbar ist. Häufig will man sogar $y \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$.

Offene Fragen:

- Existenz einer Lösung für (1.1) (lokal / global),
- explizite Form der Lösung,
- Eindeutigkeit,
- Eigenschaften der Lösung (Regularität, Abschätzungen)
- Abhängigkeit von den Daten

$$y'(t) = \alpha y(t), \qquad \tilde{y}'(t) = \tilde{\alpha} y(t)$$

mit $|\alpha - \tilde{\alpha}|$ klein.

Aussagen für (1.1): $y(t) = \exp(\alpha t)$ löst (1.1), also auch $y(t) = 2\exp(\alpha t)$. Gibt es zusätzlich eine Anfangsbedingung $y(0) = 1$, so ist $y(t) = \exp(\alpha t)$ die einzige Lösung. Wir bezeichnen dann

$$y'(t) = \alpha y(t), \quad t \in (0, \infty) \subset \mathbb{R}, \qquad y(0) = 1$$

als Anfangswertproblem (AWP).

Es lösen $y(t) = \sin t$ und $y(t) = \cos t$ die Dgl.

$$y'' + y = 0.$$

Jede Lösung hat die Form

$$y(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Damit ist die Lösungsmenge ein zweidimensionaler Unterraum von $C(I;\mathbb{R})$. Durch die Anfangsbedingungen

$$y(0) = 1 \quad \text{und} \quad y'(0) = 0$$

erhalten wir die eindeutige Lösung $y(t) = \cos t$.

Wir betrachten die Hillesche Differentialgleichung

$$y''(t) + \cos t \cdot y(t) = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0.$$

Das AWP ist eindeutig lösbar, die Lösung aber nicht explizit darstellbar. Numerisch ist das Problem allerdings einfach lösbar. Diese Situation ist der Normalfall.

Das AWP

$$y' = \sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0$$

hat im Intervall $[0,\infty)$ die beiden Lösungen $y(t) = 0$ und $y(t) = \frac{1}{4} x^2$.

<u>Definition 1.1</u> a) Eine <u>gewöhnliche Differentialgleichung</u> ist eine Gleichung der Form

$$f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{k}(t)) = 0, \qquad t \in I, \qquad (1.2)$$

Dabei sind $y: I \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto y(t)$, unbekannt, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: D \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion mit $D \subset I \times \mathbb{R}^{(k+1)n}$.

Eine häufige Notation für (1.2) lautet:

$$f(t, y, y', \ldots, y^{(k)}) = 0.$$

Falls f von $y^{(k)}$ wirklich abhängt, so heißt (1.2) Differentialgleichung k-ter Ordnung. Gilt $m>1$, so heißt (1.2) ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Lässt sich f in der Form

$$f(t,y,y',\dots,y^{(k)}) = y^{(k)} - \tilde{f}(t,y,\dots,y^{(k-1)})$$

schreiben, so nennt man (1.2) eine explizite Differentialgleichung erster Ordnung. Ist f von t unabhängig, d.h.,

$$f(t,y,\dots,y^{(k)}) = \tilde{f}(y,\dots,y^{(k)}),$$

so wird (1.2) autonom genannt. Ist f in $y,\dots,y^{(k)}$ linear, so heißt (1.2) linear.

b) Ein Anfangswertproblem ist eine Differentialgleichung (1.2), die zusätzlich mit Anfangswerten der Form $y(t_0)=y_0,\dots,y^{(k-1)}(t_0)=y_{k-1}$ versehen ist mit $t_0\in I$ und $y_0,\dots,y_{k-1}\in\mathbb{R}^n$.

c) Eine Lösung von (1.2) ist eine Funktion $y: I\to\mathbb{R}^n$, für die gilt:
- y ist k-mal differenzierbar,
- $\forall t\in I: (t,y(t),\dots,y^{(k)}(t))\in D$,
- $\forall t\in I: f(t,y(t),\dots,y^{(k)}(t))=0$.

Beispiel 1.2. a) $y''+y=0$: linear, autonom, explizit, 2. Ordnung.
b) $y''+\cos t\cdot y=0$: linear, nicht autonom, explizit, 2. Ordnung.
c) $(y')^2+y^2=1$ in $[-1,1]$: nichtlinear, autonom, nicht explizit (implizit), 1. Ordnung. ◊

Bei impliziten Gleichungen erlaubt eventuell der Satz über implizite Funktionen eine lokale Auflösung. Wir betrachten fast ausschließlich explizite Differentialgleichungen.

Bemerkung 1.3 a) Rückführung auf Differentialgleichung erster Ordnung: Betrachte die (explizite) Differentialgleichung k-ter Ordnung

$$y^{(k)} = F(t,y,\dots,y^{(k-1)}),\quad y: I\to\mathbb{R}^n. \qquad (1.3)$$

Setze für $t \in I$

$$x_1(t) = y(t),\ x_2(t) = y'(t), \dots, x_k(t) = y^{(k-1)}(t).$$

Dann ist y genau dann eine Lösung von (1.3), falls

$$x := (x_1, \dots, x_k)^T : I \to \mathbb{R}^{n \cdot k}$$

das System

$$x'(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \\ F(t, x_1(t), \dots, x_k(t)) \end{pmatrix} =: f(t, x(t))$$

löst.

b) Richtungsfelder: Betrachte das skalare Anfangswertproblem $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$. Zu $t_1 \in I$ gibt dann $f(t_1, y(t_1))$ die Steigung von y an t_1 an. Auch ohne y zu kennen, können wir daher ein Richtungsfeld zeichnen. $\Diamond$

Der folgende Satz ist schon einer der Hauptsätze für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung.

Satz 1.4 (Picard-Lindelöf, globale Version). Seien $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $t_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Sei ferner $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die einer globalen Lipschitz-Bedingung genügt:

$$\exists L > 0\ \forall t \in I\ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n : |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \le L |y_1 - y_2| \qquad (1.4)$$

Dann existiert genau eine Lösung $y \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ des Anfangswertproblems

$$y'(t) = f(t, y(t)),\ t \in [a,b] \text{ und } y(t_0) = y_0.$$

Bemerkung 1.5 a) Wenden wir Satz 1.4 auf explizite Differentialgleichungen k-ter Ordnung:

$$y^{(k)} = F(t, y, \dots, y^{(k-1)}),\quad y : I \to \mathbb{R}^n,$$

an, so erhalten wir die eindeutige Lösbarkeit für diese Differentialgleichung mit den Anfangsbedingungen

$$y(t_0) = y_0, \dots, y^{(k-1)}(t_0) = y_{k-1}$$

mit $y_j \in \mathbb{R}^n$, $j = 0, \dots, k-1$.

b) Mit dem wörtlich gleichen Beweis gilt Satz 1.4 auch für komplexwertige Funktionen. ◊

Bemerkung 1.6. Aus dem Banachschen Fixpunktsatz konvergiert die Iteration $x_k = T x_{k-1}$, $k \geq 1$, für jeden Startwert $x_0 \in C(I;\mathbb{R}^n)$ gegen den Fixpunkt y, also gegen die Lösung des Anfangswertproblems. Wir haben damit ein konstruktives Verfahren. In der Numerik werden aber deutlich bessere Verfahren verwendet. Aus der a-priori Abschätzung

$$d(y, x_n) \leq \frac{c^n}{1-c} d(x_1, x_0)$$

mit $c = L/(L+1)$ ergibt sich, dass die Konvergenz eher langsam ist. ◊

Das folgende Lemma wird häufig angewendet.

Lemma 1.7 (Gronwall) Seien $a > 0$, $y, f \in C([0,a];\mathbb{R})$ mit $f \geq 0$. Für eine Konstante $b \in \mathbb{R}$ gelte

$$y(t) \leq b + \int_0^t y(s) f(s)\, ds, \quad t \in [0,a].$$

Dann gilt

$$y(t) \leq b \exp\left(\int_0^t f(s)\, ds\right), \quad t \in [0,a].$$

Definition 1.8 Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $D \subset I \times \mathbb{R}^n$ und $f: D \to \mathbb{R}^n$. Dann erfüllt f eine lokale Lipschitz-Bedingung in D, falls gilt: Für alle $(t_0, x_0) \in D$ existiert eine Umgebung $U(t_0, x_0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und eine (lokale) Lipschitz-Konstante $L(t_0, x_0) \geq 0$ mit

$$\forall (t, x_1), (t, x_2) \in U(t_0, x_0) \cap D: |f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L(x_0, t_0) |x_1 - x_2|.$$

Bemerkung 1.9 Seien $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f: D \to \mathbb{R}^n$ stetig partiell differenzierbar. Dann ist f in D lokal Lipschitz-stetig. Denn in einer kompakten Umgebung eines Punktes $(t_0, x_0) \in D$ sind alle Ableitungen von f als stetige Funktionen beschränkt. Damit folgt die Lipschitz-Stetigkeit aus dem Mittelwertsatz. $\Diamond$

Satz 1.10 Seien $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f: D \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig. Seien $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}^n$ zwei Lösungen von $y' = f(t, y)$ über einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Falls $y_1(t_0) = y_2(t_0)$ für ein $t_0 \in I$ gilt, so folgt $y_1(t) = y_2(t)$ für alle $t \in I$.

Satz 1.11 (Picard-Lindelöf, lokale Version). Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $D \subset I \times \mathbb{R}^n$ offen. Sei $f: D \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die einer lokalen Lipschitz-Bedingung genügt. Dann existiert zu jedem $(t_0, y_0) \in D$ eine Umgebung $U(t_0, y_0)$, in welcher das Anfangsproblem

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

eine eindeutige, stetig-differenzierbare Lösung besitzt.

Beispiel 1.12 a) $y'(t) = t + y(t) =: f(t, y(t))$ ist wegen

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| = |x_1 - x_2|$$

global Lipschitz-stetig.

b) $y'(t) = t^2 + y(t)^2 =: f(t, y(t))$ ist nicht global in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig, aber lokal; denn

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| = |x_1^2 - x_2^2| \leq |x_1 + x_2|\,|x_1 - x_2|,$$

also gilt etwa in $V(x) = (x-1, x+1)$ die Lipschitzkonstante $L = 2 \cdot \max(|x-1|, |x+1|)$. Die lokale Lipschitz-Stetigkeit folgt natürlich auch aus Bemerkung 1.9.

c) Betrachte $y'(t) = (y(t))^{2/3}$, d.h. $f(t, x) = x^{2/3}$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Die

Funktion ist nicht lokal Lipschitz-stetig. Tatsächlich gilt hier nicht die Eindeutigkeit der Lösung: Eine Lösung ist $y_1 = 0$. Für $a \in \mathbb{R}$ setze $\varphi_a(t) := \frac{1}{27}(t-a)^3$. Dann ist $\varphi_a(t)$ eine weitere Lösung mit $\varphi_a(a) = y_1(a) = 0$. Beachte, dass $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \frac{2}{3} x^{-1/3}$ gilt, d.h., f ist in $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ lokal Lipschitz-stetig. Δ

<u>Satz 1.13</u> (Maximales Existenzintervall) Seien $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, zusammenhängend und $f: D \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz-stetig gemäß Definition 1.8. Für $(t_0, y_0) \in D$ betrachte

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0 \tag{1.7}$$

Dann existieren ein eindeutiges, t_0 enthaltenes offenes Intervall und ein stetig differenzierbares $y: I \to \mathbb{R}^n$, welches (1.7) löst, so dass für jedes t_0 enthaltene offene Intervall $\tilde{I}$ und jede stetig differenzierbare Lösung $\tilde{y}$ von (1.7) in $\tilde{I}$ gilt: $\tilde{I} \subset I$ und $y|_{\tilde{I}} = \tilde{y}$. Das Intervall heißt maximales Existenzintervall des AWP (1.7).

<u>Satz 1.14</u> In der Situation von Satz 1.11 sei $n = 1$. Für den Quader $Q = [t_0, t_0 + h] \times [y_0 - c, y_0 + c]$ gelte $Q \subset U(t_0, y_0)$. Dann ist die lokale Lösung y aus Satz 1.11 mindestens existent bis $t = t_0 + \min\{h, \frac{c}{M}\} =: t_0 + a$ mit $M = \max_{(t,x) \in Q} |f(t,x)|$. Es gilt $|y(t) - y_0| \leq c$ für alle $t \in [t_0, t_0 + a]$.

Die folgenden beiden Aussagen zeigen, dass die Lösung des AWP stetig von den Daten f und x_0 abhängt. Die entscheidende Bedingung ist dabei wieder die Lipschitz-Bedingung.

<u>Satz 1.15</u> a) Sei $f \in C([0,h] \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ global Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L. Seien $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$ und x bzw. y die Lösungen des AWP $x' = f(t,x), x(0) = x_0$ bzw. $y' = f(t,y), y(0) =$

y_0. Dann gilt mit $c = \frac{L}{L+1}$ die Abschätzung

$$\sup_{t\in[0,h]} |e^{-(L+1)t}(x(t)-y(t))| \le \frac{|x_0-y_0|}{1-c}.$$

b) Seien $f, g \in C([0,h]\times\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ mit $\|f-g\|_\infty < \infty$. Die Funktion f sei global Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L. Seien $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und x, y Lösungen von $x' = f(t,x)$, $x(0) = x_0$ bzw. $y' = g(t,y)$, $y(0) = y_0$. Dann gilt mit $c = L/(L+1)$

$$\sup_{t\in[0,h]} |e^{-(L+1)t}(x(t)-y(t))| \le \|f-g\|_\infty \frac{h}{1-c}.$$