2. Spezielle Lösungsmethoden

Es gibt für einige Typen von Differentialgleichungen spezielle Lösungsmethoden. Im Einzelnen sind das:

- separable Gleichungen,
- homogene Gleichungen,
- Potenzreihenansatz,
- exakte Differentialgleichungen.

Ein weiterer Typ sind die linearen Differentialgleichungen, welche in Kapitel 3 betrachtet werden.

2.1 Separable Gleichungen (Trennung der Variablen)

Wir betrachten im folgenden nur den eindimensionalen Fall $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Eine Differentialgleichung heißt separabel, falls sie von der Form

$$y'(t) = g(t)\, h(y(t)) \tag{2.1}$$

ist, d.h., $f(t,y) = g(t)\, h(y)$.

<u>Satz 2.1.</u> Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle, $g \in C(I;\mathbb{R})$ und $h \in C(J;\mathbb{R})$ mit $h(x) \neq 0$ für alle $x \in J$. Sei $(t_0, x_0) \in I \times J$. Definiere

$$G(t) = \int_{t_0}^{t} g(\tau)\, d\tau \quad \text{und} \quad H(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dz}{h(z)}.$$

Es gelte $G(I) \subset H(J)$. Dann existiert genau eine Lösung $y: I \to \mathbb{R}$ von (2.1) mit $y(t_0) = x_0$. Es gilt

$$H(y(t)) = G(t), \quad t \in I. \tag{2.2}$$

<u>Beispiel 2.2</u> Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'(t) = y(t)^2, \quad t > 0, \quad \text{und} \quad y(0) = 1.$$

Die rechte Seite der Differentialgleichung ist lokal Lipschitz-stetig, also gilt lokale Existenz und Eindeutigkeit. Wir schreiben

$$\frac{dy}{dt} = g(t)\, h(y) \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(t)\, dt + \text{const}.$$

In unserem Beispiel haben wir $g(t) = 1$, $h(x) = x^2$, d.h.,

$G(t) = \int_0^t dt = t$ und $H(x) = \int_1^x \frac{dz}{z^2} = \left(-\frac{1}{z}\right)\Big|_{z=1}^{z=x} = 1 - \frac{1}{x}$.
Somit gilt $1 - \frac{1}{y(t)} = t$ wegen (2.2), d.h., $y(t) = \frac{1}{1-t}$. ◊

2.2 Homogene Differentialgleichungen und Substitution

In vielen Fällen ist eine Substitution nützlich, um eine Differentialgleichung in eine lösbare Form zu transformieren. Hierzu ein Beispiel.

Beispiel 2.3. Betrachte
$$x'(t) = f(ax(t) + bt + c)$$
mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Wir setzen $y(t) = ax(t) + bt + c$ und erhalten
$$y'(t) = ax'(t) + b = a f(ax(t) + bt + c) = a f(y(t)) + b,$$
also eine separable Differentialgleichung. ◊

Beispiel 2.4 (homogene Differentialgleichung). Ein ähnlicher Trick funktioniert bei homogenen Differentialgleichungen. Diese haben die Form
$$x'(t) = f\left(\frac{x(t)}{t}\right)$$
Substituieren wir $y(t) = \frac{x(t)}{t}$, so folgt
$$y'(t) = \frac{x'(t)t - x(t)}{t^2} = \frac{x'(t)}{t} - \frac{x(t)}{t^2} = \frac{1}{t}\left(f(y(t)) - y(t)\right).$$
Das ist wieder eine separable Differentialgleichung ◊

Beispiel 2.5 (Bernoullische Differentialgleichung). Betrachte die Bernoullische Differentialgleichung
$$x'(t) = a(t)\,x(t) + b(t)\,x(t)^\alpha$$
mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Für $\alpha = 0$ handelt es sich um eine lineare Differentialgleichung, die wir später behandeln werden. Für $\alpha = 1$ liegt eine separable Differentialgleichung vor. Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Wir setzen $y(t) = x(t)^{1-\alpha}$. Dann gilt

$$y'(t) = (1-\alpha)\, x(t)^{-\alpha} \overbrace{\left(a(t)\, x(t) + b(t)\, x(t)^{\alpha}\right)}^{= x'(t)}$$
$$= (1-\alpha)\left(a(t)\, x(t)^{1-\alpha} + b(t)\right) = (1-\alpha)\left(a(t)\, y(t) + b(t)\right).$$

Das ist wieder eine lineare Differentialgleichung.)

<u>Beispiel 2.6</u> (Riccatische Differentialgleichung). Die Riccatische Differen lautet

$$x'(t) = k(t)\, x(t)^2 + g(t)\, x(t) + h(t) \tag{2.4}$$

mit $k, h, g \in C(\mathbb{R})$. Die Anfangsbedingung sei $x(t_0) = x^0$. Im Fall $h = 0$ handelt es sich um die Bernoullische Differentialgleichung mit $\alpha = 2$. Wir transformieren (2.4) auf eine einfachere Differentialgleichung.

a) Transformation zur Bernoullischen Differentialgleichung: Dies ist nur möglich, falls eine Lösung p mit $p(t_0) = p^0 \neq x^0$ von (2.4) schon bekannt ist. In diesem Fall setzt man $y = x - p$ und erhält

$$y' = x' - p' = kx^2 + gx + h - kp^2 - gp - h$$
$$= ky^2 - 2kp^2 + 2kxp + gx - gp = ky^2 + (2kp + g)\, y.$$

Damit löst y wieder eine Riccati-Gleichung, aber nun ist $h = 0$. Es handelt sich daher um eine Bernoullische Differentialgleichung mit $\alpha = 2$.

b) Ohne das Wissen einer Lösung p kann man durch eine Substitution die Riccati-Gleichung (2.4) auf eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung zurückführen. Sei

$$u(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} k(s)\, x(s)\, ds\right).$$

Dann folgt $u' = -kxu$ und somit

$$u'' = k^2 x^2 u^2 - k'xu - kx'u$$
$$= k^2 x^2 u - k'xu - k^2 x^2 u - kgxu - khu$$
$$= -k'xu - kgxu - khu = \frac{k'}{k} u' + gu' - khu.$$

Damit löst u das Anfangswertproblem

$u'' - u'\left(\frac{k'}{k} + g\right) + khu = 0$, $u(t_0) = 1$, $u'(t_0) = k(t_0)x^0$.
Das ist wieder eine lineare Differentialgleichung. ◊

2.3 Potenzreihenansatz

Ziel ist es, die Lösung der Differentialgleichung in Form einer konvergenten Potenzreihe anzugeben. Dabei beschränken wir uns hier auf lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung.
Betrachte die lineare Differentialgleichung

$$y''(t) + a(t)\,y'(t) + b(t)\,y(t) = s(t) \tag{2.5}$$

mit den Anfangsbedingungen $y(t_0) = y^0$, $y'(t_0) = y^1$. Die Koeffizienten a, b und die rechte Seite s seien in einem offenen Intervall $\mathcal{J} = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ in eine Potenzreihe um t_0 entwickelbar, d.h., in Reihen der Form $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (t - t_0)^k$, welche mindestens in $\mathcal{J}$ konvergieren. Wir setzen den Ansatz

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (t - t_0)^k \tag{2.6}$$

in (2.5) ein und erhalten eine Rekursionsformel für die unbekannten c_k's. Beachte, dass eine Potenzreihe im Inneren ihres Konvergenzkreises unendlich oft differenzierbar und die Ableitung mit der Summation vertauscht werden kann. Das rechtfertigt unser Vorgehen.

Beispiel 2.7 (Hermitesche Differentialgleichung). Die Hermitesche Differentialgleichung lautet

$$y''(t) - 2t\,y'(t) + \lambda y(t) = 0 \tag{2.7}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Koeffizienten sind Polynome, also insbesondere in eine überall konvergente Potenzreihe um 0 entwickelbar. Mit (2.6) für $t_0 = 0$ folgt

$$y'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} t^k,$$
$$y''(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) c_{k+2} t^k.$$

Eingesetzt in (2.7) ergibt sich
$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)c_{k+2}t^k - 2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}t^{k+1} + \lambda\sum_{k=0}^{\infty}c_k t^k = 0.$$
Durch Koeffizientenvergleich (Identitätssatz für Potenzreihen) erhalten wir
$$2c_2 + \lambda c_0 = 0,\quad (k+2)(k+1)c_{k+2} - 2kc_k + \lambda c_k = 0 \quad (k \in \mathbb{N}).$$
Die Koeffizienten c_0 und c_1 sind frei wählbar, die anderen ergeben sich dann durch die Rekursion
$$c_{k+2} = \frac{2k-\lambda}{(k+2)(k+1)}c_k,\quad k \in \mathbb{N}_0.$$
Gilt insbesondere $\lambda = 2n_0 \in 2\mathbb{N}$, so ist $c_{k+2} = 0$ für alle $k = n_0, n_0+2, n_0+4, \dots$. In diesem Fall existiert ein Polynom, welches (2.7) löst. Z.B. können wir für $\lambda = 4$ die Anfangskoeffizienten $c_0 = 1$, $c_1 = 1$ wählen. Wir erhalten $c_2 = -\frac{\lambda}{2}c_0 = -2$, $c_4 = \frac{4-\lambda}{4\cdot 3} = 0 = c_6 = c_8 = \dots$. Ferner gilt $c_3 = c_5 = \dots = 0$. Also ist
$$y(t) = c_0t^0 + c_1t^1 + c_2t^2 + \dots = 1 + 0 + (-2)t^2 + 0 = 1 - 2t^2.$$
Auf diese Weise erhalten wir (bis auf Normierung) die Hermite-Polynome. $\lozenge$

2.4 Exakte Differentialgleichungen

Eine Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Gebiet, falls G offen und zusammenhängend ist.

Definition 2.8. Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und seien $f_1, f_2 \in C(G;\mathbb{R})$. Dann heißt die Differentialgleichung
$$f_1(t,y(t)) + f_2(t,y(t))\,y'(t) = 0 \tag{2.8}$$
exakt, falls eine Stammfunktion $F \in C^1(G;\mathbb{R})$ existiert mit $\nabla F = (f_1, f_2)^T$.

Bemerkung 2.9. Definieren wir die 1-Form
$$\omega(x)(h) := f_1(x)h_1 + f_2(x)h_2 = f_1(x)\,dx_1(h) + f_2(x)\,dx_2(h),$$
so ist (2.8) genau dann exakt, wenn ω exakt ist. Zur Er-

innerung: Für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen heißt eine stetige Abbildung $\omega: U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x,h) \mapsto \omega(x,h)$ eine __1-Form in U__, falls ω linear in h ist. Eine 1-Form ω heißt __exakt__, falls ein $F \in C^1(U;\mathbb{R})$ existiert mit $\omega = dF$, d.h., $\omega(x,h) = \langle \nabla F(x), h \rangle$. F heißt __Stammfunktion__.

Formal erhalten wir ω durch Umformung

$$f_1(t,y)\,dt + f_2(t,y)\,dy = 0 \qquad (2.9)$$

und Umbenennung $x_1 = t$, $x_2 = y$. Gleichung (2.9) ist eine „symmetrische" Version von (2.8). ◊

__Satz 2.10.__ a) Seien (2.8) exakt mit Stammfunktion F und $y: J \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Es gelte $(t, y(t)) \in G$ für alle $t \in J$. Dann ist y genau dann eine Lösung von (2.8), wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$F(t, y(t)) = c \qquad (t \in J).$$

b) Seien G sternförmig und $f_1, f_2 \in C^1(G)$. Dann ist die Differentialgleichung (2.8) genau dann exakt, falls $\partial_2 f_1 = \partial_1 f_2$ gilt.

Zur Lösung einer exakten Differentialgleichung müssen wir nach Satz 2.10 eine Stammfunktion F bestimmen. Dazu können wir Ergebnisse aus Analysis 2 verwenden. Gegeben sei (2.8) mit der Anfangsbedingung $y(t_0) = y^0$. Um eine Stammfunktion $F: G \to \mathbb{R}$ zu bestimmen, wählen wir zu $(t,x) \in G$ eine stückweise glatte Kurve $\Gamma = [\gamma]$, $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^2$, mit Anfangspunkt $\gamma(a) = (t_0, y^0)$ und Endpunkt (t,x). Dann ist $F(t,x)$ durch das (wegunabhängige) Kurvenintegral

$$F(t,x) = \int_\Gamma \omega = \int_a^b \left\langle \begin{pmatrix} f_1(\gamma(t)) \\ f_2(\gamma(t)) \end{pmatrix}, \gamma'(t) \right\rangle_{\mathbb{R}^2} dt$$

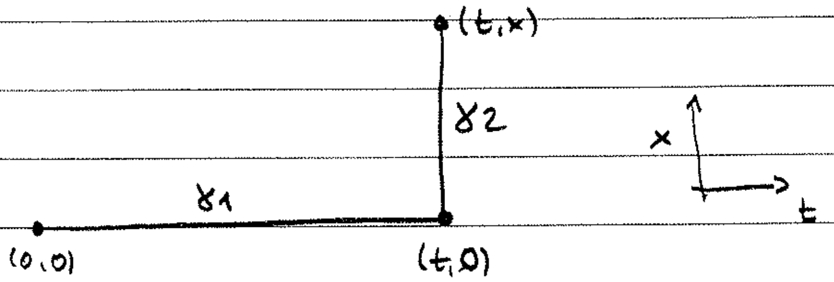
gegeben. Dabei kann die Wegunabhängigkeit ausgenutzt werden um lokal einen Weg entlang der Koordinatenachsen zu wählen.

Beispiel 2.11 Betrachte die Differentialgleichung

$$(3t^2+4t\,y(t)) + (2t^2+3y(t)^2)\cdot y'(t) = 0.$$

Hier sind $f_1(t,x)=3t^2+4tx$ und $f_2(t,x)=2t^2+3x^2$. Wegen $\partial_2 f_1(t,x) = \partial_x f_1(t,x) = 4t = \partial_t f_2(t,x) = \partial_1 f_2(t,x)$ handelt es sich um eine exakte Differentialgleichung. Wir wählen zu $(t_0,y^0):=(0,0)$ und zu $(t,x)\in\mathbb{R}^2$ die Wegstücke

$$\Gamma_1=[\gamma_1],\ \gamma_1:[0,t]\to\mathbb{R}^2,\quad s\longmapsto(s,0),$$
$$\Gamma_2=[\gamma_2],\ \gamma_2:[0,x]\to\mathbb{R}^2,\quad s\longmapsto(t,x).$$



Damit ist

$$F(t,x)=\int_0^t \overbrace{(3s^2+4s\cdot 0)}^{f_1(s,0)}\cdot\overbrace{1}^{(\gamma_1'(s))_1}\, ds + \int_0^x \overbrace{(2t^2+3s^2)}^{f_2(t,s)}\cdot \overbrace{1}^{\gamma_2'(s)}\, ds$$

$(\gamma_1'(s))_2=0$

$$= s^3\Big|_{s=0}^{s=t} + (2t^2s+s^3)\Big|_{s=0}^{s=x} = t^3+2t^2x+x^3.$$

$(\gamma_2'(s))_1=0$

Die Lösung der Differentialgleichung folgt nach Satz 2.10 durch (lokale) Lösung der Gleichung $F(t,y(t))=\text{const.}$, d.h.,

$$t^3+2t^2y(t)+y(t)^3=\text{const.}$$

◇