3. Lineare Differentialgleichungen

Lineare Differentialgleichungen bilden eine besonders wichtige Klasse von Differentialgleichungen, in welcher die Menge der Lösungen im Wesentlichen eine Vektorraumstruktur besitzt. Obwohl lineare Differentialgleichungen eine deutlich einfachere Struktur als nicht-lineare Gleichungen aufweisen, sind viele lineare Differentialgleichungen nicht elementar lösbar.

3.1 Homogene lineare Differentialgleichungen

Lineare Differentialgleichungssysteme haben die Form

$$y'(t) = A(t)\,y(t) + b(t)\,, \quad y(t_0) = y^0 \qquad (3.1)$$

mit $A \in C(J; \mathbb{C}^{n\times n})$, $b \in C(J;\mathbb{C}^n)$, $t_0 \in J$ und $y^0 \in \mathbb{C}^n$ für ein (beliebiges Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Eine Lösung von (3.1) ist eine differenzierbare Funktion $y: J \to \mathbb{C}^n$, die (3.1) erfüllt. Wegen (3.1) folgt $y \in C^1(J;\mathbb{C}^n)$. Wir arbeiten hier gleich in $\mathbb{C}^n$, wie wir später verstehen werden. Nach Analysis 2 sind auf $\mathbb{C}^n$ und $\mathbb{C}^{n\times n}$ alle Normen äquivalent. Insbesondere hängt die Stetigkeit nicht von der verwendeten Norm ab. Meist werden wir die euklidische Norm $|\cdot|$ oder die Maximumnorm $|\cdot|_\infty$ auf $\mathbb{C}^n$ und die dazugehörige Operatornorm auf $\mathbb{C}^{n\times n}$ wählen.

<u>Satz 3.1</u>. Es gelten $A \in C(J;\mathbb{C}^{n\times n})$ und $b \in C(J;\mathbb{C}^n)$. Dann existiert zu jedem $t_0 \in J$ und $y^0 \in \mathbb{C}^n$ genau eine Lösung $y \in C^1(J;\mathbb{C}^n)$ von (3.1).

<u>Korollar 3.2</u> a) In der Situation von Satz 3.1 sei $t_0 \in J$ fest. Dann definiert die Abbildung

$$T: C^1(J;\mathbb{C}^n) \to C(J;\mathbb{C}^n)\times\mathbb{C}^n,\quad y \mapsto (y' - Ay,\, y(t_0))$$

einen Vektorraumisomorphismus.

b) Für festes $t_0 \in J$ sei $H: C^1(J;\mathbb{C}^n) \to C(J;\mathbb{C}^n)$, $y \mapsto y' - Ay$ und $\operatorname{Ker} H = \{ y \in C^1(J;\mathbb{C}^n) : Hy = 0 \}$. Dann ist die Abbildung

$$G: \operatorname{Ker} H \to \mathbb{C}^n, \quad y \mapsto y(t_0) = G(y)$$

ein Vektorraumisomorphismus.

<u>Satz 3.3</u>. Es existieren genau n linear unabhängige Lösungen in $C^1(J;\mathbb{C}^n)$ von $y'(t) = A(t)y(t)$. Ein System $\{z_1,\dots,z_n\}$ von Lösungen ist genau dann eine Basis des Lösungsraums, wenn $z_1(t_0),\dots,z_n(t_0)$ linear unabhängig in $\mathbb{C}^n$ sind.

<u>Definition 3.4</u> a) Sei $\{z_1,\dots,z_n\}$ ein System von Lösungen von $y'(t) = A(t)y(t)$. Dann heißt die aus den Spalten gebildete Matrix $Z := [z_1,\dots,z_n] : J \to \mathbb{C}^{n\times n}$ die <u>Wronski-Matrix</u> und $w(t) = \det Z(t)$ die <u>Wronski-Determinante</u>.

b) Eine Basis $\{z_1,\dots,z_n\}$ des Lösungsraums S von $y'(t) = A(t)\,y(t)$ heißt ein <u>Fundamentalsystem</u>. Die Wronski-Matrix heißt in diesem Fall eine Fundamentalmatrix.

<u>Bemerkung 3.5</u> a) Aus Satz 3.3 sehen wir: Seien $z_1,\dots,z_n$ Lösungen der Differentialgleichung $y' = Ay$. Dann ist $\{z_1,\dots,z_n\}$ genau dann ein Fundamentalsystem, falls $w(t) = \det Z(t) \neq 0$ für alle $t \in J$ ist. Dies ist äquivalent dazu, dass $w(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in J$ ist.

b) Eine Wronski-Matrix löst die Matrix-Differentialgleichung $Z'(t) = A(t)Z(t)$. Falls Z eine Fundamentalmatrix ist, so ist eine Funktion $z \in C^1(J;\mathbb{C}^n)$ genau dann eine Lösung von $y' = Ay$, falls ein $c \in \mathbb{C}^n$ existiert mit $z(t) = Z(t)c$, $t \in J$. Denn z ist genau dann Lösung, falls z eine Linearkombination der Spalten $z_1,\dots,z_n$ von Z ist. $\Diamond$

<u>Satz 3.6</u> (Formel von Liouville). Die Wronski-Determinante ist differenzierbar mit $w'(t) = (\operatorname{tr} A(t))\, w(t)$. Damit gilt
$$w(t) = w(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\, ds \right).$$

3.2 Inhomogene Gleichungen

Wir betrachten nun
$$y'(t) = A(t)\, y(t) + b(t) \qquad (3.2)$$
mit $A \in C(J; \mathbb{C}^{n\times n})$ und $b \in C(J; \mathbb{C}^n)$.

<u>Lemma 3.7.</u> Seien $y_p \in C^1(J; \mathbb{C}^n)$ eine spezielle (partikuläre) Lösung von (3.2) und $Z \in C^1(J; \mathbb{C}^{n\times n})$ eine Fundamentalmatrix. Dann ist die allgemeine Lösung gegeben durch $y(t) = y_p(t) + Z(t)c$ mit $c \in \mathbb{C}^n$.

<u>Satz 3.8</u> (Variation der Konstanten). Sei $Z: J \to \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Fundamentalmatrix der homogenen Differentialgleichung $y' = Ay$. Dann erhalten wir eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $y' = Ay + b$ durch den Ansatz
$$y_p(t) = Z(t)\, c(t),$$
wobei $c \in C(J; \mathbb{C}^n)$ eine Lösung von $Z(t)c'(t) = b(t)$ ist, d.h.
$$c(t) = c(t_0) + \int_{t_0}^{t} Z(s)^{-1} b(s)\, ds.$$

<u>Beispiel 3.9.</u> Gegeben sei das Differentialgleichungssystem
$$y_1'(t) = -y_2(t),$$
$$y_2'(t) = y_1(t) + t.$$
In Matrix-Schreibweise erhalten wir
$$y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}.$$
Eine Fundamentalmatrix der homogenen Gleichung ist durch
$$Z(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

gegeben. Damit ist
$$Z(t)^{-1}\begin{pmatrix}0\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\sin t\\ t\cos t\end{pmatrix}.$$
Die Variation der Konstanten liefert
$$c(t) = \int_0^t \begin{pmatrix}s\cdot\sin s\\ s\cos s\end{pmatrix} ds + \text{const.}$$
Partielle Integration ergibt
$$c(t) = \begin{pmatrix}-s\cos s + \sin s\\ s\sin s + \cos s\end{pmatrix}\Big|_{s=0}^{s=t} = \begin{pmatrix}-t\cos t + \sin t\\ t\sin t + \cos t - 1\end{pmatrix}.$$
Damit erhalten wir
$$\begin{aligned} y_p(t) = Z(t)\,c(t) &= \begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-t\cos t + \sin t\\ t\sin t + \cos t - 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-t\cos^2 t + \cos t\sin t - t\sin^2 t - \sin t\cos t + \sin t\\ -\sin t\, t\cos t + \sin^2 t + \cos t\, t\sin t + \cos^2 t - \cos t\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\sin t - t\\ 1-\cos t\end{pmatrix}. \end{aligned}$$
Die allgemeine Lösung hat die Form $y(t) = Z(t)d + y_p(t)$, wobei $d \in \mathbb{R}^2$ durch $y(t_0) = y^0$ bestimmt wird.

3.3 Systeme mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten
$$y'(t) = Ay(t), \quad t \in \mathbb{R},$$
mit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Im skalaren Fall $y' = \alpha y$ ist die Lösung $y(t) = c\exp(\alpha t)$ mit $c \in \mathbb{C}$. Eine Möglichkeit, (3.3) zu lösen, besteht in einer Erweiterung der exp-Funktion für Matrizen.

Seien $|\cdot|$ die euklidische Norm in $\mathbb{C}^n$ und $\|\cdot\| : \mathbb{C}^{n\times n} \to [0,\infty)$ die zugehörige Operator/Matrix-Norm. Beachten Sie, dass die Operatornorm submultiplikativ ist, d.h., es gilt
$$\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$$
für $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Definition 3.10 Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist
$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$
die *Exponentialfunktion* von A.

Satz 3.11 a) Die exp-Reihe ist normkonvergent, d.h., es gilt
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{A^n}{n!} \right\| < \infty,$$
und damit konvergent. Es gelten $\exp(0) = I_n$ und $\|\exp(A)\| \leq \exp(\|A\|)$.

b) Für $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $AB = BA$ gilt
$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B).$$

c) Durch $Z(t) = \exp(tA)$ ist die eindeutige Lösung der (Matrizen-) Differentialgleichung $Z'(t) = AZ(t)$ mit $Z(0) = I_n$ gegeben. Eine Funktion $y \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$ ist genau dann eine Lösung von (3.3), falls ein $c \in \mathbb{C}^n$ existiert mit
$$y(t) = \exp(tA)\, c, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Nach Satz 3.11 ist die Lösung von (3.3) auf die Berechnung der exp-Funktion einer Matrix zurückgeführt. Um explizite Lösungen zu erhalten, verwenden wir den Satz über die Jordan-Normalform, der aus der linearen Algebra bekannt ist: Zu $\lambda \in \mathbb{C}$ und $p \in \mathbb{N}$ sei
$$J_p(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$
die Jordan-Elementarmatrix (Jordan-Kästchen) der Dimension p. Dann existiert zu jeder Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine invertierbare Matrix $S \in GL(n, \mathbb{C})$ mit
$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & J(\lambda_1) & & & \\ & & & J(\lambda_2) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & J(\lambda_l) \end{pmatrix},$$
wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von A sind und $J(\lambda_k)$ ein Jordan-Kästchen geeigneter Dimension zu λ_k ist. Es gilt $S^{-1}AS = D + N$ mit $DN = ND$, D Diagonalmatrix und N nilpotent. Auf D stehen die Eigenwerte entsprechend ihrer algebraischen Vielfachheit. Es folgen:

$$S^{-1}\, tAS = tD + tN$$

und

$$S^{-1}\exp(tA)S = \exp(S^{-1}tAS) = \exp(tD)\exp(tN).$$

Also

$$\exp(tA) = S\exp(tD)\exp(tN)S^{-1}.$$

Zu einem Jordan-Kästchen $J_p(\lambda_k)$ der Dimension p zu λ_k sind die Hauptvektoren $h_1,\dots,h_p$ definiert durch

$$(A-\lambda_k I_n)h_j = h_{j-1}, \quad j=1,\dots,p$$

mit $h_0=0$. Der Vektor h_1 ist ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_k und h_j heißt Hauptvektor der Stufe j. S besteht aus allen Hauptvektoren von A, denn:

$$S^{-1}ASe_j = \lambda_j e_j + e_{j-1}$$

bedeutet für $h_j = Se_j$ (j-te Spalte von S)

$$Ah_j = \lambda_j h_j + h_{j-1}.$$

<u>Satz 3.12</u> Sei h_j, $1\le j\le p$, der Hauptvektor zur Stufe j zum Eigenwert λ der Matrix A. Dann ist

$$y_j(t) = e^{\lambda t}\left(h_j + t h_{j-1} + \frac{t^2}{2}h_{j-2} + \dots + \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}h_1\right)$$

eine Lösung der Differentialgleichung $y' = Ay$. Das System aller so gebildeten Lösungen (zu allen Jordan-Kästchen) bildet ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung.

3.4 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x^{(k)}(t) + a_1 x^{(k-1)}(t) + \dots + a_k x(t) = 0 \tag{3.4}$$

und sehen (gemäß Bemerkung 1.3-a))

$$y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(k-1)}(t) \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_k & -a_{k-1} & \dots & -a_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k\times k}.$$

Dann ist (3.4) äquivalent zu $y'(t) = Ay(t)$.

Satz 3.13 a) Das charakteristische Polynom der Matrix A ist gegeben durch

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \ldots + a_{k-1}\lambda + a_k.$$

b) Sei λ eine p-fache Nullstelle von χ_A. Dann sind

$$x_1(t) = e^{\lambda t},\ x_2(t) = te^{\lambda t}, \ldots, x_p(t) = t^{p-1} e^{\lambda t}$$

linear unabhängige Lösungen von (3.4). Betrachten wir diese Lösungen für alle Nullstellen von χ_A, so erhalten wir ein Fundamentalsystem.

Satz 3.14 Betrachte

$$x^{(k)}(t) + a_1 x^{(k-1)}(t) + \ldots a_k x(t) = t^s e^{\lambda t} \qquad (3.5)$$

mit $s \in \mathbb{N}_0$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Sei λ eine p-fache Nullstelle von χ_A mit $p \in \mathbb{N}_0$, d.h., $\chi_A(\mu) = (\mu - \lambda)^p \psi(\mu)$ mit $\psi(\lambda) \neq 0$. Dann ist

$$x(t) = \frac{s!}{(p+s)!} \frac{\partial^{p+s}}{\partial \mu^{p+s}} \left(\frac{\exp(\mu t)}{\psi(\mu)} \right) \Big|_{\mu=\lambda}$$

eine partikuläre Lösung von (3.5).

Bemerkung 3.15 (Leibniz-Formel) Im Beweis von Satz 3.14 wird die Produktregel für höhere Ableitungen benötigt. Dies ist die sogenannte Leibniz-Formel: Seien f, g n-fach differenzierbar. Dann gilt

$$(fg)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Diese Formel kann induktiv bewiesen werden. $\diamond$

Bemerkung 3.16: Bei Differentialgleichungen mit reellen Koefficienten führen die bisherigen Ansätze auf komplexwertige Lösungen. Falls y eine Lösung von $y' = Ay$ ist, so ist auch $\operatorname{Re} y$ und $\operatorname{Im} y$ eine Lösung. Wenn die Matrix A reell ist, treten komplexe Eigenwerte stets in komplex konjugierten Paaren auf. Wegen

$$e^{\lambda t} = e^{\mathrm{Re}(\lambda t)}\left(\cos(\mathrm{Im}(\lambda t)) + i\sin(\mathrm{Im}(\lambda t))\right)$$

Kommen dann cos- und sin-Terme vor. ◇

<u>Beispiel 3.17</u> Betrachte

$$x^{(4)}(t) - 2x''(t) + x(t) = 24t\sin t. \qquad (3.6)$$

a) Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung: Es ist

$$\chi_A(\mu) = \mu^4 - 2\mu^2 + 1 = (\mu-1)^2(\mu+1)^2.$$

Nach Satz 3.13 ist also

$$e^t, te^t, e^{-t}, te^{-t}$$

ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung.

b) Übergang zum Komplexen: Wegen $t\sin t = \mathrm{Im}(te^{it})$ betrachten wir zunächst die rechte Seite te^{it}.

c) Bestimmung einer partikulären Lösung: In der Bezeichnung von Satz 3.14 ist $s=1$, $\lambda = i$ und $p=0$. Damit ist $\varphi(t) = \chi_A(t)$, und der Ansatz für die spezielle Lösung lautet für die Inhomogenität te^{it}:

$$x_0(t) = \frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{e^{\mu t}}{\varphi(\mu)}\right)\Big|_{\mu=i} = \frac{\varphi(\mu)\mu e^{\mu t} - \varphi'(\mu)e^{\mu t}}{\varphi^2(\mu)}\Big|_{\mu=i}$$

$$= \ldots = \tfrac{1}{4}(t+2i)e^{it}.$$

Für die rechte Seite $24te^{it}$ erhalten wir die komplexwertige spezielle Lösung

$$24x_0(t) = (6t+12i)e^{it} = (6t+12i)(\cos t + i\sin t)$$

$$= (6t\cos t - 12\sin t) + i(6t\sin t + 12\cos t).$$

d) Rückkehr zur reellen Lösung: Da die ursprüngliche rechte Seite der Imaginärteil der in c) betrachteten Inhomogenität war, ist auch der Imaginärteil von x_0 eine partikuläre Lösung der ursprünglichen Gleichung. Somit ist

$$\mathrm{Im}(24x_0(t)) = 6t\sin t + 12\cos t$$

eine spezielle Lösung von (3.6).

e) Allgemeine Lösung: $x(t) = c_1e^t + c_2te^t + c_3e^{-t} + c_4te^{-t} + 6t\sin t + 12\cos t$

$c_1, \ldots, c_4 \in \mathbb{C}$. ◇