4. Stabilität

Es geht nun um das Verhalten von Lösungen, insbesondere die Stabilität, d.h., das Verhalten für $t \to \infty$. Eine Lösung heißt stabil, falls eine kleine Abweichung im Anfangswert eine (für alle Zeiten) kleine Abweichung in der Lösung bewirkt. Man beachte, dass kleine Abweichungen in den Daten bei Anwendungen stets vorhanden sind. Die Stabilität einer Differentialgleichung ist in der Regel schwer zu beweisen. Es geht daher nur um einen kleinen Einblick in das Gebiet.

Definition 4.1 Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = f(t, y(t)), \; t \in J, \; y(t_0) = y^0 \qquad (4.1)$$

mit $f : J \times X \to X$, $X := \mathbb{R}^n$. Der Raum X heißt der Zustands- oder Phasenraum.

Seien nun (4.1) eindeutig lösbar und $t_0 \in J$ fest. Dann heißt die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R} \times X \to X, \quad (t, y^0) \longmapsto \Phi(t, y^0) := y(t)$$

der Fluß der Differentialgleichung, wobei y wieder die Lösung von (4.1) bezeichnet. Der zugehörige Wertebereich

$$\gamma(y^0) := \{\Phi(t, y^0) : t \in J\}$$

heißt Orbit (oder Phasenkurve, Trajektorie). Ein $y^0 \in X$ heißt ein Fixpunkt, falls gilt

$$\Phi(t, y^0) = y^0 \quad \text{für alle } t \in J.$$

Offensichtlich ist y^0 genau dann ein Fixpunkt, wenn $f(t, y^0) = 0$ gilt für alle $t \in J$. In diesem Fall wird y^0 ein singulärer Punkt von f genannt. Z.B. besitzt die logistische Gleichung

$$y'(t) = y(t)(y(t) - 1)$$

die singulären Punkte $y^0 = 0$ und $y^0 = 1$.

Beispiel 4.2 Die Differentialgleichung

$$x'' + x = 0$$

(ungedämpftes lineares Pendel) ist äquivalent zum System

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y(t) = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ -y_1(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

mit $y = (y_1, y_2)^T = (x, x')^T$. Zu $y^0 \in \mathbb{R}^2$ löst

$$\phi(t, y^0) = y(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} y^0$$

das Anfangswertproblem $y'(t) = A\,y(t)$ und $y(0) = y^0$. Damit ist der Orbit periodisch mit Periode 2π. Δ

Orbits bei 2×2-Matrizen werden in den Übungen betrachtet.

Definition 4.3. Eine Lösung y von

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(0) = y^0$$

heißt stabil, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle Lösungen x des Anfangswertproblems

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = x^0$$

mit $|x^0 - y^0| < \delta$ gilt

$$|x(t) - y(t)| < \varepsilon, \quad t \in [0, \infty).$$

Eine Lösung heißt instabil, falls sie nicht stabil ist. Die Lösung heißt asymptotisch stabil, falls sie stabil ist und falls für x wie oben zusätzlich gilt

$$\lim_{t\to\infty} |x(t) - y(t)| = 0.$$

Die triviale Lösung $y = 0$ von $y' = Ay$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann

- instabil, falls ein Eigenwert λ von A existiert mit $\operatorname{Re}\lambda > 0$ oder falls ein Eigenwert λ von A existiert mit $\operatorname{Re}\lambda = 0$, für welchen

die algebraische Vielfachheit größer ist als die geometrische,
- stabil, falls für alle Eigenwerte λ von A gilt: $\operatorname{Re}\lambda \le 0$ und für alle Eigenwerte λ mit $\operatorname{Re}\lambda = 0$ die algebraische gleich der geometrischen Vielfachheit ist,
- asymptotisch stabil, falls für alle Eigenwerte λ gilt $\operatorname{Re}\lambda < 0$.

__Beispiel 4.4__ Betrachte die Differentialgleichung einer gedämpften Schwingung

$$y''(t) + y(t) + r\,y'(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

mit $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei $r > 0$ der Dämpfungsfaktor ist. Multiplikation mit y' ergibt

$$y''y' + yy' + r(y')^2 = 0.$$

Also erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\left(|y'|^2 + |y|^2\right) = -2r\,(y')^2 \le 0.$$

Damit ist die linke Seite als Funktion von t monoton fallend, d.h.,

$$|y'(t)|^2 + |y(t)|^2 \le |y'(0)|^2 + |y(0)|^2.$$

Daher ist $y_0 = 0$ eine stabile Lösung der Differentialgleichung, denn eine kleine Abweichung des Startwerts $(y(0), y'(0))$ an der Stelle $t=0$ kann für alle $t \in \mathbb{R}$ nicht größer werden.
Als System erster Ordnung erhalten wir die (autonome) Gleichung

$$x'(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ -x_1(t) - r\,x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -r \end{pmatrix} x(t) =: f(x(t)).$$

Für $E(x) = |x|^2$ erhalten wir für eine Lösung $x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$

$$\frac{d}{dt} E(x(t)) = \nabla E(x(t))^T x'(t) = 2\,x(t)^T x'(t)$$
$$= 2\,(x_1(t), x_2(t)) \begin{pmatrix} x_2(t) \\ -x_1(t) - r\,x_2(t) \end{pmatrix} = -r\,x_2(t)^2 \le 0.$$

E heißt Lyapunov-Funktion zu $x' = f(x)$.

__Definition 4.5__ Der Punkt $x^0 \in \mathbb{R}^n$ sei ein isolierter singulärer

Punkt des Vektorfeldes $f \in C(\mathbb{R}^n)$. Dann heißt $L \in C^1(U(x^0);\mathbb{R})$, $U(x^0) \subset \mathbb{R}^n$ eine Umgebung von x^0, eine Lyapunov-Funktion der autonomen Differentialgleichung $x'(t) = f(x(t))$ am Punkt x^0, falls gilt

a) $L(x) \geq 0$ und $L(x) = 0$ nur an der Stelle x^0,

b) Es gilt $\langle \nabla L(x), f(x) \rangle \leq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Satz 4.6 Sei $x^0 = 0 \in \mathbb{R}^n$ ein isolierter singulärer Punkt von $f \in C(\mathbb{R}^n)$. Falls eine Lyapunov-Funktion L zur autonomen Differentialgleichung $x'(t) = f(x(t))$ am Punkt x^0 existiert, so ist die konstante Lösung $y=0$ stabil.

Bemerkung 4.7 a) Die Schwierigkeit liegt darin, eine Lyapunov-Funktion zu finden.

b) Gilt in Definition 4.5-b) sogar

$$\langle \nabla L(x), f(x) \rangle < 0 \quad , x \in \mathbb{R}^n,$$

so spricht man von einer strengen Lyapunov-Funktion. Dann kann man asymptotische Stabilität beweisen. ◊