5. Rand- und Eigenwertprobleme

Die Schwingung einer Saite führt auf die partielle Differentialgleichung

$$\partial_t^2 u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = 0,$$

wobei t die Zeit und $x \in [0,L]$ den Ort auf der Saite der Länge L beschreibt. Die Lösung $u(t,x)$ ist dann die Auslenkung der Saite an der Stelle x zur Zeit t. Eine natürliche Bedingung ist, dass die Saite am Rand fest eingespannt ist:

$$u(t,0) = u(t,L) = 0.$$

Wir geben noch die Auslenkung und die Geschwindigkeit am $t=0$ vor:

$$u(0,x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0,x) = u_1(x).$$

Wir machen den Ansatz $u(t,x) = a(t)\,v(x)$ (Separationsansatz). Dann folgt aus der Differentialgleichung $a''(t)v(x) - a(t)v''(x) = 0$, und wir erhalten

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{a''(t)}{a(t)} =: -\lambda$$

mit einer Konstanten $\lambda \in \mathbb{R}$. Für die Funktion v erhalten wir eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$v''(x) + \lambda v(x) = 0, \quad v(0) = v(L) = 0.$$

Wir beobachten:

- Es sind nicht der Wert und die erste Ableitung an einer Stelle vorgegeben (wie beim AWP), sondern der Wert der Lösung an zwei verschiedenen Stellen (Randwertproblem, RWP).
- In der Gleichung taucht ein unbekannter Parameter λ auf.

Es handelt sich um eine sogenannte Eigenwertaufgabe.

In diesem Kapitel wollen wir wieder die Frage nach der eindeutigen Lösbarkeit eines Randwertproblems stellen. Es stellt sich heraus, dass das Randwertproblem nicht in jedem Fall eindeutig lösbar ist. Manchmal existiert gar keine

Lösung. Oder es gibt unendlich viele Lösungen. Existiert eine eindeutige Lösung für ein Randwertproblem, so kann die Lösung mit der Greenschen Funktion berechnet werden.

5.1 Randwertaufgaben für lineare Differentialgleichungssysteme

Wir betrachten

$$y'(t) = F(t)\, y(t) + g(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{5.1}$$

$$Ay(a) + By(b) = c \tag{5.2}$$

Hier seien $a < b$, $F \in C([a,b]; \mathbb{C}^{n\times n})$, $g \in C([a,b]; \mathbb{C}^n)$, $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $c \in \mathbb{C}^n$. Im folgenden sei $Y \in C^1([a,b]; \mathbb{C}^{n\times n})$ eine Fundamentalmatrix des homogenen Systems, d.h.,

$$Y'(t) = F(t)\, Y(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Durch Variation der Konstanten erhalten wir eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems

$$y_0(t) = Y(t) \left(\int_a^t Y(s)^{-1} g(s)\, ds \right).$$

Die allgemeine Lösung hat die Form

$$y(t) = y_0(t) + Y(t)\, d$$

mit $d \in \mathbb{C}^n$.

Satz 5.1 Das Randwertproblem (5.1)–(5.2) ist genau dann für beliebiges g und c eindeutig lösbar, wenn die charakteristische Matrix

$$C_Y := A\,Y(a) + B\,Y(b)$$

invertierbar ist. Dies ist äquivalent dazu, dass das zugehörige homogene Randwertproblem

$$y'(t) = F(t)\, y(t), \quad Ay(a) + By(b) = 0$$

nur die triviale Lösung $y = 0$ besitzt.

Bemerkung 5.2 Seien Y und Z zwei Fundamentalmatrizen zu (5.1). Da das zu (5.1) gehörige Randwertproblem eindeutig lösbar ist, gilt $Z(t) = Y(t) S$ mit der invertierbaren Matrix $S = Y(a)^{-1} Z(a)$. Für die charakteristischen Matrizen erhalten wir

$$C_Z = A Z(a) + B Z(b) = C_Y S.$$

Also ist C_Z genau dann invertierbar, falls C_Y dies ist. $\Diamond$

Der folgende Satz liefert eine Darstellung der Lösung des Randwertproblems mit homogenen Randbedingungen:

$$y'(t) = F(t) y(t) + g(t), \quad A y(a) + B y(b) = 0 \qquad (5.3)$$

<u>Satz 5.3</u> Sei C_Y invertierbar. Dann existiert eine matrizenwertige Abbildung $G : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}^{n \times n}$ (die Greensche Matrix) mit folgenden Eigenschaften:

a) Die Einschränkung von G auf die Bereiche $\{(t,s) : a \le t < s \le b\}$ und $\{(t,s) : a \le s \le t \le b\}$ ist jeweils stetig.

b) $G(t+0, t) - G(t-0, t) = I_n$ für $a < t < b$

c) Für jedes $g \in C([a,b]; \mathbb{C}^n)$ ist durch
$$y(t) := \int_a^b G(t,s) g(s) \, ds$$
die Lösung des Randwertproblems (5.3) gegeben.

<u>Bemerkung 5.4</u> Aus der Definition von C_Y erhalten wir
$$I_n - C_Y^{-1} B Y(b) = C_Y^{-1} (C_Y - B Y(b)) = C_Y^{-1} A Y(a)$$
und damit die symmetrische Darstellung der Greenschen Matrix
$$G(t,s) = \begin{cases} Y(t) C_Y^{-1} A Y(a) Y(s)^{-1} & a \le s \le t \le b, \\ Y(t) C_Y^{-1} B Y(b) Y(s)^{-1} & a \le t < s \le b. \end{cases} \Diamond$$

Da sich die Lösung des Randwertproblems durch Integration über $G(t,\cdot)$ ergibt, spielen die Werte von G auf der Diagonalen $\Delta := \{(t,t) : t \in [a,b]\}$ keine Rolle.

Lemma 5.5 Die Greensche Matrix ist durch die folgenden Eigenschaften eindeutig bestimmt:

a) G ist auf $[a,b]^2 \setminus \Delta$ stetig.

b) Es gilt $G(t+0,t) - G(t-0,t) = I_n$, $a < t < b$.

c) Für jedes feste $s \in [a,b]$ löst $G(\cdot,s)$ die homogene Matrizen-Differentialgleichung $\partial_t G(t,s) = F(t)\, G(t,s)$, $t \in (a,b) \setminus \{s\}$.

d) Für jedes feste $s \in (a,b)$ erfüllt $G(\cdot,s)$ die homogenen Randbedingungen $A\, G(a,s) + B\, G(b,s) = 0$.

5.2 Randwertprobleme für lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Nun betrachten wir lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung:

$$f_0(t) x^{(n)}(t) + f_1(t) x^{(n-1)}(t) + \dots + f_n(t) x(t) = \gamma(t) \tag{5.4}$$

wobei $a < b$ und $f_0, f_1, \dots, f_n, \gamma \in C([a,b]; \mathbb{C})$ mit $f_0(t) \neq 0$, $t \in [a,b]$, seien. Wir haben n lineare Randbedingungen der Form

$$R_i x := \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x^{(j-1)}(a) + \beta_{ij} x^{(j-1)}(b) = \gamma_i \,; \quad 1 \leq i \leq n. \tag{5.5}$$

Hier sind $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_i \in \mathbb{C}$ für $i,j = 1, \dots, n$. Zur einfachen Notation definieren wir die Randoperatoren $R_i : C^n([a,b]; \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq n$, durch

$$R_i x := \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x^{(j-1)}(a) + \beta_{ij} x^{(j-1)}(b).$$

Damit lässt sich (5.5) schreiben als $R_i x = \gamma_i$, $1 \leq i \leq n$. Man kann (5.4) normieren durch

$$\tilde{f}_j := \frac{f_j}{f_0}, \; j = 0, \dots, n, \quad \tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{f_0}.$$

Ferner seien $y(t) = (x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t))^T$ und

$$F(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -\tilde{f}_n(t) & -\tilde{f}_{n-1}(t) & \dots & -\tilde{f}_1(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \tilde{\gamma}(t) \end{pmatrix}.$$

Mit $A := ((\alpha_{ij}))_{1\le i,j\le n}$, $B := ((\beta_{ij}))_{1\le i,j\le n}$, $c = (\gamma_i)_{1\le i\le n}$ ist das Randwertproblem (5.4) - (5.5) äquivalent zum Randwertproblem

$$y'(t) = F(t)\, y(t) + g(t), \quad A\, y(a) + B\, y(b) = c.$$

Wir setzen wieder $\Delta = \{(t,t) : t \in [a,b]\}$.

Satz 5.6 Das homogene Randwertproblem (5.4) - (5.5) mit $\gamma = 0$ und $\gamma_i = 0$, $1 \le i \le n$, besitze nur die triviale Lösung $y = 0$. Dann existiert eine Funktion $G : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$, welche in $[a,b]^2 \setminus \Delta$ stetig ist und für welche durch

$$x(t) = \int_a^b G(t,s)\, \gamma(s)\, ds, \quad a \le t \le b,$$

die Lösung der Differentialgleichung (5.4) mit homogenen Randbedingungen $R_i x = 0$, $i = 1, \ldots, n$, gegeben ist. Die Funktion G heißt Greensche Funktion des Randwertproblems.

Lemma 5.7 Die Greensche Funktion $G : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ zum Randwertproblem (5.4) - (5.5) ist durch die folgenden Eigenschaften eindeutig bestimmt:

a) G ist stetig, und für jedes feste $s \in [a,b]$ ist $G(\cdot, s) \in C^{n-2}([a,b]; \mathbb{C})$.

b) Für jedes feste $s \in [a,b]$ ist $G(\cdot, s)$ in $[a,b] \setminus \{s\}$ n-mal stetig differenzierbar mit

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} G(t+0,t) - \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} G(t-0,t) = \frac{1}{f_0(t)}, \quad t \in (a,b).$$

c) Für jedes feste $s \in [a,b]$ löst $G(\cdot, s)$ die homogene Differentialgleichung (5.4) in $[a,b] \setminus \{s\}$.

d) Für jedes feste $s \in [a,b]$ erfüllt $G(\cdot, s)$ die homogenen Randbedingungen (5.5).

5.3 Sturm-Liouville-Randwertaufgaben

Wir betrachten das Randwertproblem zweiter Ordnung:

$$(Lx)(t) := -(p(t)\, x'(t))' + q(t)\, x(t) = r(t), \tag{5.6}$$

$$R x_1 := \alpha_{11}\, x(a) + \alpha_{12}\, x'(a) = \gamma_1, \quad R x_2 := \beta_{21}\, x(b) + \beta_{22}\, x'(b) = \gamma_2. \tag{5.7}$$

Dabei sind $p \in C^1([a,b];\mathbb{C})$ mit $p(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$, $q, r \in C([a,b];\mathbb{C})$ und $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_i \in \mathbb{C}$ mit $(\alpha_{11}, \alpha_{12}) \neq 0$ und $(\beta_{11}, \beta_{12}) \neq 0$. Ein Randwertproblem der Form (5.6)-(5.7) heißt ein Sturm-Liouville Randwertproblem.

<u>Satz 5.8.</u> Das zu (5.6)-(5.7) gehörige homogene Randwertproblem besitze nur die triviale Lösung. Dann lässt sich die Greensche Funktion des Randwertproblems in der Form

$$G(t,s) = \begin{cases} -\frac{1}{p(a)W(a)}\, \varphi(t)\, \psi(s), & a \le t \le s \le b, \\ -\frac{1}{p(a)W(a)}\, \varphi(s)\, \psi(t) & a \le s \le t \le b \end{cases}$$

darstellen. Dabei sind φ und ψ Lösungen von $Lx = 0$ mit $R_1\varphi = 0$, $R_2\varphi \neq 0$ und $R_2\psi = 0$, $R_1\psi \neq 0$. Ferner ist

$$W(t) := W(\varphi,\psi)(t) := \varphi(t)\,\psi'(t) - \varphi'(t)\,\psi(t)$$

die Wronski-Determinante zu $\{\varphi, \psi\}$.

<u>Bemerkung 5.9</u> a) In der Situation von Satz 5.8 gilt $G(t,s) = G(s,t)$ (Symmetrie der Greenschen Funktion).

b) Nach Bemerkung 5.2 ist das Randwertproblem (5.6)-(5.7) genau dann eindeutig lösbar falls für ein Fundamentalsystem $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ von (5.6) gilt

$$\det\left((R_i\varphi_j)_{i,j=1,2} \right) = \det \begin{pmatrix} R_1\varphi_1 & R_1\varphi_2 \\ R_2\varphi_1 & R_2\varphi_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

In diesem Fall gilt das für alle Fundamentalsysteme. ⚡

<u>Beispiel 5.10.</u> Betrachte für einen reellen Parameter $k \geq 0$

$$(Lx)(t) = -x''(t) - k^2 x(t) = f(t), \quad t \in [0,1],$$

mit den Randbedingungen

$$R_1 x := x(0) = 0, \quad R_2 x := x(1) = 0.$$

Hier sind $p = 1$ und $q = -k^2$. Ein Fundamentalsystem von $Lx = 0$ ist $\varphi_1(t) =$

$\sin(kt)$, $\varphi_2(t) = \cos(kt)$. Dafür gilt

$$\det\begin{pmatrix} R_1\varphi_1 & R_1\varphi_2 \\ R_2\varphi_1 & R_2\varphi_2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sin k & \cos k \end{pmatrix} = -\sin k \neq 0$$

falls $k \notin \pi\mathbb{Z}$.

Sei also $k \notin \pi\mathbb{Z}$, d.h., das Randwertproblem eindeutig lösbar. Um die Greensche Matrix zu berechnen, bestimmen wir φ und ψ aus Satz 5.8. Eine Lösung von $Lx = 0$, $R_1 x = 0$ ist $\varphi(t) = \sin(kt)$. Eine Lösung von $Lx = 0$, $R_2 x = 0$ ist $\psi(t) = \sin(k(1-t))$. Die Wronski-Determinante an $a = 0$ ist

$$W(0) = \varphi(0)\psi'(0) - \varphi'(0)\psi(0) = 0\cdot(-k\cos k) - k\sin k$$
$$= -k\sin k \neq 0,$$

da $k \notin \pi\mathbb{Z}$. Nach Satz 5.8 gilt daher

$$G(t,s) = \begin{cases} -\frac{1}{p(0)W(0)}\,\varphi(t)\psi(s) = \frac{1}{k\sin k}\sin(kt)\sin(k(1-s)), & 0 \le t \le s \le 1, \\ -\frac{1}{p(0)W(0)}\,\varphi(s)\psi(t) = \frac{1}{k\sin k}\sin(ks)\sin(k(1-t)), & 0 \le s \le t \le 1. \end{cases}$$

Die Lösung des Randwertproblems $Lx = y$, $R_1 x = R_2 x = 0$ für $y \in C([0,1];\mathbb{C})$ ist damit

$$x(t) = \int_0^t G(t,s)\,y(s)\,ds, \quad t \in [0,1],$$

mit obiger Greenscher Funktion G. ⚡

5.4 Selbstadjungierte Eigenwertaufgaben

Wir betrachten wieder ein Sturm-Liouville-Randwertproblem, diesmal aber mit einem (unbekannten) Eigenwertparameter $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$(Lx)(t) := -\frac{1}{r(t)}\Big((p(t)x'(t))' - q(t)x(t)\Big) = \lambda x(t), \tag{5.8}$$

$$R_1 x := \alpha_{11}x(a) + \alpha_{12}x(b) = \gamma_1, \quad R_2 x := \beta_{21}x(a) + \beta_{22}x(b) = \gamma_2 \tag{5.9}.$$

Dabei sind jetzt die Koeffizienten reellwertig, d.h., $p \in C^1([a,b];\mathbb{R})$ mit $p(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$, $q, r \in C([a,b];\mathbb{R})$ und $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_i \in \mathbb{R}$ mit $(\alpha_{11},\alpha_{12}) \neq 0$ und $(\beta_{21},\beta_{22}) \neq 0$. Zusätzlich gelte noch $r(t) > 0$ für alle $t \in [a,b]$.

<u>Definition 5.11</u> a) Der zum Eigenwertproblem (5.8)-(5.9) gehörige lineare Operator A ist definiert als Abbildung $A: D(A) \to C([a,b];\mathbb{C})$ mit Definitionsbereich

$$D(A) := \{x \in C^2([a,b];\mathbb{C}) : R_1 x = R_2 x = 0\} \subset C([a,b];\mathbb{C})$$

durch $Ax := Lx$, $x \in D(A)$.

b) Ein <u>Eigenwert</u> von A ist eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$, für welche ein $u \in D(A) \setminus \{0\}$ existiert mit $Au = \lambda u$. In diesem Fall heißt u eine <u>Eigenfunktion</u> von A.

c) Das zum Eigenwertproblem (5.8)-(5.9) zugehörige <u>Skalarprodukt</u> ist

$$\langle u,v\rangle := \int_a^b r(t)\, u(t)\, \overline{v(t)}\, dt, \quad u,v \in C([a,b];\mathbb{C}).$$

Die <u>Norm</u> ist definiert durch $\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$.

Im folgenden bezeichne $\langle \cdot,\cdot \rangle$ und $\|\cdot\|$ stets das oben definierte Skalarprodukt bzw. die oben definierte Norm. Dass es sich tatsächlich um ein Skalarprodukt und damit um eine Norm handelt, sieht man sofort wie in der Analysis 1.

<u>Bemerkung 5.12.</u> a) Das Randwertproblem $Au = \lambda u$ hat immer die Lösung $u = 0$. Die Eigenwerte sind also genau diejenigen λ, in denen keine eindeutige Lösung gegeben ist. Sei $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $Lu - \lambda u = 0$, $\varphi_j = \varphi_j(t,\lambda)$. Dann existiert genau dann eine Eigenfunktion $x = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$, falls

$$\sum_{j=1}^{2} c_j R_i(\varphi_j(\cdot,\lambda)) = 0, \quad i = 1,2,$$

eine nichttriviale Lösung besitzt. Dies ist äquivalent zu der Bedingung

$$\Delta(\lambda) := \det \begin{pmatrix} R_1(\varphi_1(\cdot,\lambda)) & R_1(\varphi_2(\cdot,\lambda)) \\ R_2(\varphi_1(\cdot,\lambda)) & R_2(\varphi_2(\cdot,\lambda)) \end{pmatrix} = 0$$

b) Nach Satz 5.8 ist die Greensche Funktion reellwertig. ◊

<u>Satz 5.13</u> a) Der Operator A ist symmetrisch, d.h., es gilt
$\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle$, $u, v \in D(A)$.
b) Alle Eigenwerte von A sind reell. Die zugehörigen Eigenfunktionen können reell gewählt werden.
c) Die Eigenfunktionen u_1, u_2 zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sind orthogonal, d.h., es gilt $\langle u_1, u_2\rangle = 0$.

Wir wollen die Eigenwerte von A näher untersuchen. Dazu betrachten wir die Eigenwerte von A^{-1}.

<u>Lemma 5.14</u>. Das homogene Randwertproblem $Lx = 0$, $R_i x = 0$ besitze nur die triviale Lösung (d.h., $\lambda = 0$ ist kein Eigenwert von A). Sei G die zugehörige Greensche Funktion.
a) Der Operator $A: D(A) \to C([a,b];\mathbb{C})$ ist bijektiv, d.h., der inverse Operator $M = A^{-1}: C([a,b];\mathbb{C}) \to C([a,b];\mathbb{C})$ ist wohldefiniert.
b) Es gilt $(Mf)(t) = \int_a^b r(s)\, G(t,s) f(s)\, ds$ für $f \in C([a,b];\mathbb{C})$.
c) Der Operator M ist symmetrisch.
d) Eine Zahl $\mu \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ ist genau dann ein Eigenwert von M, falls $\frac{1}{\mu}$ Eigenwert von A ist.
e) Für alle $f \in C([a,b];\mathbb{C})$ ist $\langle Mf, f\rangle \in \mathbb{R}$.

<u>Lemma 5.15</u> Falls 0 kein Eigenwert von A ist, so gelten:
a) Es existiert ein $f \in C([a,b];\mathbb{C})$ mit $\langle Mf, f\rangle \neq 0$.
b) Für die Operatornorm $\|M\| = \sup_{f\neq 0} \|Mf\|/\|f\| = \sup_{\|f\|=1} \|Mf\|$ ist

$$\|M\| = \sup_{\|f\|=1} |\langle Mf, f\rangle| = \sup_{f\neq 0} \frac{|\langle Mf, f\rangle|}{\|f\|^2}.$$