1. Maßtheoretische Grundlagen

In Analysis wurde der Zugang zur Berechnung vom Maß einer Menge über das Riemann-Integral gewählt. Hier soll ein vertiefter (und für Konvergenzaussagen günstiger) Ansatz diskutiert werden, das allgemeine Lebesgue-Maß und Lebesgue-Integral.

1.1 Inhalte und Maße

Definition 1.1. Seien X eine Menge, $\mathcal{P}(X) := \{A : A \subset X\}$ die Potenzmenge von X und $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$.

a) $\mathcal{A}$ heißt <u>σ-Algebra</u> über X, falls gelten:

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

(ii) für jedes $A \in \mathcal{A}$ gilt $A^c = \{x \in X : x \notin A\}$,

(iii) für $A_n \in \mathcal{A}$ $(n \in \mathbb{N})$ gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

In diesem Fall heißt $(X, \mathcal{A})$ <u>Messraum</u>.

b) Falls statt (iii) nur gilt:

(iii') für $A, B \in \mathcal{A}$ gilt $A \cup B \in \mathcal{A}$,

so heißt $\mathcal{A}$ eine <u>Algebra</u>.

c) Falls statt (iii) nur gilt:

(iii'') falls $A_n \in \mathcal{A}$ disjunkt sind (d.h. $A_n \cap A_m = \emptyset$ für $n \neq m$),

dann ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$,

so heißt $\mathcal{A}$ ein <u>Dynkin-System</u>.

d) $\mathcal{A}$ heißt ein <u>Ring</u>, falls $\emptyset \in \mathcal{A}$ und für alle $A, B \in \mathcal{A}$ gilt $A \setminus B \in \mathcal{A}$ und $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Bemerkung 1.2 a) Die bezüglich Mengeninklusion größte σ-Algebra ist $\mathcal{P}(X)$, die kleinste ist $\{\emptyset, X\}$. Falls $\mathcal{A}_i$ eine σ-Algebra ist für $i \in I$, wobei I eine nichtleere Indexmenge ist, dann ist $\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ wieder eine σ-Algebra.

Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ beliebig. Dann ist

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap \{\mathcal{A} \supset \mathcal{E} : \mathcal{A} \text{ ist σ-Algebra über } X\}$$

die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält (von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra). Analog existieren ein kleinstes Dynkin-System $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ und eine kleinste Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält.

b) Man betrachte die Zusammenhänge der verschiedenen Mengensysteme. Zum Beispiel ist ein Ring $\mathcal{A}$ genau dann eine Algebra, falls $X \in \mathcal{A}$ gilt. Jede Algebra ist auch ein Ring.

c) Ein Mengensystem $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(X)$ ist genau dann ein Dynkin-System, wenn gelten

(i) $X \in \mathcal{A}$

(ii) Für $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subset B$ gilt $B \setminus A \in \mathcal{A}$.

(iii) Für $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ gilt $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

<u>Lemma 1.3</u> a) Sei $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ $\cap$-stabil, d.h., für alle $A, B \in \mathcal{D}$ ist $A \cap B \in \mathcal{D}$. Wenn $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System ist, so ist es auch eine σ-Algebra. Beachte, dass jede σ-Algebra ein Dynkin-System ist (denn Bedingung (iii) ist stärker als Bedingung (iii'') in Def. 1.1).

b) (Dynkin-Lemma). Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ $\cap$-stabil. Dann ist $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{D}(\mathcal{E})$.

<u>Definition 1.4</u>. a) Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum. Dann heißt $\mu: \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ein <u>Maß</u>, falls gelten:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) σ-Additivität: Für $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $A_n \cap A_m = \emptyset$ $(n \neq m)$ ist

$$\mu\Big(\dot{\bigcup_{n=0}^{\infty}} A_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n). \tag{1.1}$$

In diesem Fall heißt $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein <u>Maßraum</u>.

b) Sei $\mathcal{A}$ ein Ring. Dann heißt $\mu: \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ein <u>Inhalt</u>, falls $\mu(\emptyset) = 0$ und

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \quad \text{für alle } A, B \in \mathcal{A} \text{ mit } A \cap B = \emptyset$$

(endliche Additivität) gilt. Ein Inhalt heißt <u>σ-additiv</u>, falls für alle $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ mit $A_n \cap A_m = \emptyset$ $(n \neq m)$ und $\dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} A_n$ die Gleichheit

(1.1) gilt.

c) Ein Inhalt μ auf einem Ring $\mathcal{A}$ heißt

- <u>σ-endlich</u> (oder <u>normal</u>), falls es eine Folge $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ gibt mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$ und $\mu(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
- <u>endlich</u>, falls $\mu(A) < \infty$ für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt (falls $\mathcal{A}$ eine Algebra oder sogar eine σ-Algebra ist, ist dies äquivalent damit, dass $\mu(X) < \infty$ gilt).

d) Ein Maß μ auf einer σ-Algebra heißt <u>Wahrscheinlichkeitsmaß</u>, falls $\mu(X) = 1$ gilt.

<u>Bemerkung 1.5.</u> In obiger Definition und auch im folgenden tritt der Wert ∞ auf. Dabei sind folgende Rechenregeln zu beachten:

- $\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty = 0$,
- $\infty \cdot a = a \cdot \infty = \infty \quad (0 < a \leq \infty)$,
- $\infty + a = a + \infty = \infty \quad (-\infty < a < \infty)$.

Der Ausdruck $\infty - \infty$ ist nicht definiert. $\Diamond$

Beispiel 1.6 a) <u>Dirac-Maß</u>: Zu $x \in X$ definiere

$$\delta_x(A) := \chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Dann ist δ_x ein Maß auf $\mathcal{P}(X)$ und damit auf jeder σ-Algebra. Das Maß wird Dirac-Maß oder auch Punktmaß bezeichnet.

b) Seien $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} := \{ n \in \mathbb{N} : A \text{ oder } A^c \text{ endlich} \}$ und

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ endlich}, \\ 1, & \text{falls } A^c \text{ endlich}. \end{cases}$$

Dann ist $\mathcal{A}$ eine Algebra und μ ein Inhalt, aber $\mathcal{A}$ ist keine σ-Algebra, und μ ist nicht σ-additiv auf $\mathcal{A}$.

c) <u>Zählmaß</u>: Definiere

$$\zeta(A) = \begin{cases} |A|, & \text{falls } A \text{ endlich}, \\ \infty, & \text{falls } A \text{ unendlich}. \end{cases}$$

Dann ist ζ ein Maß auf $\mathcal{P}(X)$, welches genau dann σ-endlich ist, falls X abzählbar ist. ◊

Bemerkung 1.7. a) Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $E \in \mathcal{A}$. Dann ist $\mathcal{A} \cap E := \{A \cap E : A \in \mathcal{A}\}$ eine σ-Algebra, und die Einschränkung $\mu|_E := \mu|_{\mathcal{A} \cap E}$ ist wieder ein Maß. Man erhält einen neuen Maßraum $(E, \mathcal{A} \cap E, \mu|_E)$ und spricht von einer Spur-σ-Algebra bzw. einem Spurmaß.

b) Seien $X \neq \emptyset$ eine Menge, $(Y, \mathcal{B})$ ein Messraum und $f : X \to Y$ eine Funktion. Dann ist

$$\sigma(f) := f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$$

eine σ-Algebra auf X, die von f erzeugte σ-Algebra. ◊

Beispiel 1.8 (Elementargeometrischer Inhalt). Das folgende Beispiel ist uns aus der Analysis II bekannt: Zu $a, b \in \mathbb{R}^n$ sei

$$(a,b] := \{x \in \mathbb{R}^n : a_j < x_j \leq b_j,\ 1 \leq j \leq n\}$$

mit $a = (a_1, \ldots, a_n)$ und $b = (b_1, \ldots, b_n)$ das n-dimensionale Intervall. Sei $\mathbb{I}_n := \{(a,b] : a, b \in \mathbb{R}^n\}$ das System der Intervalle und

$$\mathbb{A}_n := \{\dot{\bigcup}_{i=1}^{k} A_i : A_i \in \mathbb{I}_n\}$$

das System aller endlichen Vereinigungen disjunkter Intervalle. Dann ist $\mathbb{A}_n$ ein Ring. Definiere den elementargeometrischen Inhalt durch

$$\lambda((a,b]) := \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$$

auf $\mathbb{I}_n$ und durch

$$\lambda(\dot{\bigcup}_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} \lambda(A_i)$$

auf $\mathbb{A}_n$. Dann ist $\lambda : \mathbb{A}_n \to [0, \infty)$ ein Inhalt. ◊

Bemerkung 1.9 Sei μ ein Inhalt auf einem Ring $\mathcal{A}$. Dann gelten

a) μ ist monoton, d.h., für $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subset B$ gilt $\mu(A) \leq \mu(B)$.

b) μ ist subtraktiv, d.h., für $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subset B$ und $\mu(A) < \infty$ gilt
$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$
c) μ ist subadditiv, d.h., für $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ gilt
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

Satz 1.10 Sei μ ein Inhalt auf einem Ring. Betrachte die folgenden Aussagen:

a) μ ist σ-additiv.

b) Für alle $A_n \in \mathcal{A}$ mit $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n =: A \in \mathcal{A}$ gilt:
$$\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \mu(A),$$
d.h., μ ist stetig von unten.

c) Für alle $A_n \in \mathcal{A}$ mit $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$ und $\mu(A_1) < \infty$ gilt:
$$\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = 0,$$
d.h., μ ist stetig von oben.

Dann folgt: a) $\Leftrightarrow$ b) $\Rightarrow$ c).

Falls μ endlich ist, sind alle drei Aussagen äquivalent.

Beispiel 1.11 Wir zeigen, dass der elementar geometrische Inhalt λ σ-additiv auf $\mathbb{A}_n$ ist. Da λ endlich ist, genügt es, die Eigenschaft c) aus Satz 1.10 nachzurechnen. Seien also $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ mit $A_j \in \mathbb{A}_n$ und $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j = \emptyset$. Sei $\varepsilon > 0$. Da A_j (Riemann-) messbar ist, existiert nach Analysis II eine kompakte Menge $\tilde{K}_j \subset A_j$ mit $\lambda(A_j \setminus \tilde{K}_j) < \varepsilon \cdot 2^{-j}$. Für $K_j = \tilde{K}_1 \cap \dots \cap \tilde{K}_j$ gilt dann ebenfalls $K_j \subset A_j$. Außerdem ist
$$A_j \setminus K_j = \bigcup_{i=1}^{j} (A_j \setminus \tilde{K}_i) \subset \bigcup_{i=1}^{j} (A_i \setminus \tilde{K}_i)$$
und damit
$$\lambda(A_j \setminus K_j) \le \sum_{i=1}^{j} \lambda(A_i \setminus \tilde{K}_i) \le \sum_{i=1}^{j} \varepsilon\, 2^{-i} = \varepsilon \sum_{i=1}^{j} 2^{-i} < \varepsilon.$$
Da alle K_j kompakt sind mit $K_1 \supset K_2 \supset \dots$ und
$$\bigcap_{j \in \mathbb{N}} K_j = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j = \emptyset$$
gilt, existiert ein $j_0 \in \mathbb{N}$ mit $K_j = \emptyset$ für $j \ge j_0$. Damit gilt für alle

$j \geq j_0$

$$\lambda(A_j) = \lambda(A_j \setminus K_j) < \varepsilon.$$

Somit folgt $\lambda(A_j) \to 0$ für $j \to \infty$ und λ ist daher σ-additiv nach Satz 1.10.

Wegen $\mathbb{R}^n = \bigcup_{j=1}^{\infty} (-j,j]^n$ ist λ auch σ-endlich auf $\mathbb{A}_n$. $\square$

In vielen Fällen ist nicht ein Maß auf einer σ-Algebra gegeben, sondern ein Maß auf einer Algebra oder einem Ring. Daher stellt sich die Frage, ob sich dieser Inhalt eindeutig zu einem Maß fortsetzen lässt. Die folgende Konstruktion liefert die Antwort.

Definition 1.12. Ein äußeres Maß auf einer Menge X ist eine Funktion $\mu^*: \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$,

(ii) $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{P}(X)$ mit $A \subset B$,

(iii) $\mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$ für alle $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$.

Eine Menge $A \subset X$ heißt μ^*-messbar, falls

$$\mu^*(B) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A^c \cap B) \quad \text{für alle } B \in \mathcal{P}(X).$$

Definition und Satz 1.13. Sei μ ein σ-additiver Inhalt auf einem Ring $\mathcal{A}$. Definiere $\mu^*: \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ durch

$$\mu^*(A) = \begin{cases} \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) : A_n \in \mathcal{A},\ A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\}, & \text{falls } \{\ldots\} \neq \emptyset, \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) μ^* ist ein äußeres Maß und heißt das zu μ gehörige äußere Maß.

b) Jede Menge $A \in \mathcal{A}$ ist μ^*-messbar, und es gilt $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu$.

Satz 1.14 (Carathéodory). Sei μ ein σ-additiver Inhalt auf einem Ring $\mathcal{A}$. Dann ist das Mengensystem $\bar{\sigma}(\mathcal{A})$ aller μ^*-messbaren Mengen eine ($\sigma(\mathcal{A})$ enthaltende) σ-Algebra, und $\mu^*|_{\bar{\sigma}(\mathcal{A})}$ ist ein Maß mit

$\mu^* = \mu$ auf $\mathcal{A}$. Insbesondere existiert zu μ eine Maßfortsetzung.

<u>Satz 1.15</u> (Eindeutigkeitssatz) Seien $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra und $\mu, \nu: \mathcal{A} \to [0, \infty]$ zwei σ-endliche Maße, welche auf einem $\cap$-stabilen Erzeuger $\mathcal{E}$ von $\mathcal{A}$ übereinstimmen. Ferner enthalte $\mathcal{E}$ eine Folge von Mengen $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ mit $S_1 \subset S_2 \subset \ldots$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n = X$ und $\mu(S_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\mu = \nu$.

<u>Definition 1.16.</u> Ein Maß μ auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ heißt <u>vollständig</u>, falls gilt: Aus $A \subset B$, $B \in \mathcal{A}$ und $\mu(B) = 0$ folgt $A \in \mathcal{A}$.

Wir erhalten den Fortsetzungssatz.

<u>Satz 1.17.</u> Seien $\mathcal{A}$ eine Algebra und $\mu: \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ein σ-additiver und σ-endlicher Inhalt. Dann existiert genau eine Maßfortsetzung $\tilde{\mu}$ von μ auf die von $\mathcal{A}$ erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{A})$. Die Fortsetzung ist gegeben durch $\tilde{\mu} = \mu^*|_{\sigma(\mathcal{A})}$. Weiter ist durch $\mu^*|_{\mathcal{J}(\mathcal{A})}$ eine vollständige Maßfortsetzung von μ gegeben.

<u>Bemerkung 1.18.</u> Im Satz von Caratheodory wird das zum Inhalt μ gehörige äußere Maß μ^* betrachtet. Im Beweis werden jedoch nur die Eigenschaften aus der Definition 1.12 eines äußeren Maßes verwendet. Damit sehen wir, dass gilt: Sei ν ein äußeres Maß (im Sinne von Definition 1.12) auf $\mathcal{P}(X)$, und seien $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ die ν-messbaren Mengen. Dann ist $(X, \mathcal{M}, \nu|_{\mathcal{M}})$ ein Maßraum. $\Diamond$

<u>1.2 Das Lebesgue-Maß</u>

<u>Definition 1.19.</u> Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Dann heißt die von den offenen Mengen erzeugte σ-Algebra $\mathcal{B}(X) :=$

$\sigma(\tau)$ die Borel-σ-Algebra zu X.

Lemma 1.20. Die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ist die von den halboffenen Intervallen $\mathbb{I}_n = \{(a,b] : a,b \in \mathbb{R}^n\}$ erzeugte σ-Algebra.

Lemma 1.21. a) Jedes σ-endliche Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ist bereits durch die Werte auf den halboffenen Intervallen $\mathbb{I}_n$ eindeutig festgelegt.
b) Jedes endliche Maß $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty)$ (insbesondere jedes Wahrscheinlichkeitsmaß) ist bereits durch seine Verteilungsfunktion
$$F_\mu : \mathbb{R}^n \to [0,\infty), \quad x \mapsto \mu((-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n])$$
eindeutig festgelegt.

Definition 1.22. Wir setzen $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ und definieren die Borel-σ-Algebra auf $\overline{\mathbb{R}}$ durch
$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) := \sigma(\{(a,\infty] \subset \overline{\mathbb{R}} : a \in \mathbb{R}\}).$$

Definition 1.23 (Lebesgue Maß). Sei $\lambda : \mathbb{A}_n \to [0,\infty)$ der elementargeometrische Inhalt (vergleiche Beispiele 1.8, 1.11). Die nach Satz 1.17 eindeutige Maßfortsetzung auf $\sigma(\mathbb{A}_n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ heißt das Lebesgue-Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und wird wieder mit λ bezeichnet, ebenso wie die Maßfortsetzung auf $\tilde{\sigma}(\mathbb{A}_n)$. Die λ^*-messbaren Mengen $A \in \tilde{\sigma}(\mathbb{A}_n)$ heißen die Lebesgue-Mengen des $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung 1.24. Die Mächtigkeit (Kardinalität) von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist dieselbe wie die von $\mathbb{R}$, aber die Kardinalität der Lebesgue-messbaren Mengen ist $2^{|\mathbb{R}|}$ und damit größer. Das letzte sieht man, wenn man eine Menge C mit $|C| = |\mathbb{R}|$ und $\lambda(C) = 0$ angibt.

(z.B. die Cantormenge). Dann ist jede Teilmenge von C Lebesgue-messbar. Es gibt also 'sehr viel mehr' Mengen in der Vervollständigung $\tilde{\sigma}(\mathcal{A})$ als in $\sigma(\mathcal{A})$. $\Diamond$

Satz 1.25 (Regularität des Lebesgue-Maßes). Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar und beschränkt. Dann existiert eine offene Menge U mit $K \subset M \subset U$ und $\lambda(U \setminus K) < \varepsilon$.

Satz 1.26. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar. Dann existieren Borelmengen $F, G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mit $F \subset M \subset G$ und $\lambda(G \setminus M) = \lambda(M \setminus F) = 0$.

Definition 1.27. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine Menge $N \subset X$ heißt μ-Nullmenge, falls $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$. Man sagt, eine Eigenschaft gilt μ-fast überall, falls die Menge aller $x \in X$, für welche diese Eigenschaft nicht gilt, eine μ-Nullmenge ist, z.B., $f = 0$ μ-fast überall als $\mu(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) = 0$.

Bemerkung 1.28. a) Falls das Maß vollständig ist, ist die Teilmenge einer Nullmenge wieder eine Nullmenge. Nach Satz 1.17 ist jede Teilmenge einer Lebesgue-messbaren Nullmenge wieder eine Nullmenge. Aber nicht jede Teilmenge einer Borelmenge $N \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mit $\lambda(N) = 0$ ist Borel-messbar.

b) Abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind Nullmengen.

c) Für das Lebesgue-Maß gilt: Einzelne Punkte (und damit abzählbar viele Punkte) sind Nullmengen. $\Diamond$

Beispiel 1.29 (Cantor-Menge). Definiere iterativ die Mengen $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ durch

$$C_1 := [0,1], \quad C_2 := C_1 \setminus \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right) = \left[0, \tfrac{1}{3}\right] \cup \left[\tfrac{2}{3}, 1\right],$$

$C_3 := C_2 \setminus \left(\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right) \right) = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right],$

$C_4 := C_3 \setminus \left(\left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right) \cup \left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right) \cup \left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right) \cup \left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right) \right)$

$= \left[0, \frac{1}{27}\right] \cup \left[\frac{2}{27}, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{7}{27}\right] \cup \left[\frac{8}{27}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{19}{27}\right] \cup \left[\frac{20}{27}, \frac{7}{9}\right]$

$\cup \left[\frac{8}{9}, \frac{25}{27}\right] \cup \left[\frac{26}{27}, 1\right]$

$\vdots$

(d.h., wir nehmen jeweils in den verbleibenden Intervallen das mittlere Drittel weg). Die Cantormenge C ist nun definiert als $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$. Als abzählbarer Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Andererseits gilt $\lambda(C_1) = 1$, $\lambda(C_2) = 1 - \frac{1}{3}$, $\lambda(C_3) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9}$, $\lambda(C_4) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} - \frac{4}{27}$ etc. Wir erhalten

$$\lambda(C) = 1 - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \right) = 1 - 1 = 0.$$

Die Elemente in C sind gerade die Zahlen $x \in [0,1]$, welche eine 3-adische Entwicklung der Form

$$x = 0.a_1 a_2 a_3 \ldots$$

mit $a_n \in \{0, 2\}$ besitzen. Die Abbildung $x = 0.a_1 a_2 a_3 \ldots \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^{-n}$ ist surjektiv von C nach $[0,1]$. Also besitzt die Menge C die gleiche Mächtigkeit (Kardinalität) wie das Intervall $[0,1]$, nämlich $|[0,1]| = |\mathbb{R}| =: \mathfrak{c}$. Insbesondere ist C überabzählbar. Die Cantormenge ist somit eine überabzählbare Lebesgue-Nullmenge. Da das Lebesgue-Maß (auf den Lebesgue-messbaren Mengen) vollständig ist, ist jede Teilmenge von C wieder Lebesgue-messbar (und eine Nullmenge). Dies zeigt, dass die Lebesgue-messbaren Mengen die Mächtigkeit $|\mathcal{P}(\mathbb{R})| = 2^{\mathfrak{c}}$ besitzen. $\square$