2. Integration

Nachdem wir nun die Maßkonstruktion kennen, wird als nächstes das Integral eingeführt. Ähnlich wie beim Riemann-Integral in Analysis II beginnt man mit den Stufenfunktionen (die hier allerdings allgemeiner sind) und definiert das Integral für allgemeinere Funktionen durch Grenzwertbildung.

2.1 Messbare Abbildungen

Definition 2.1 a) Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(S, \mathcal{S})$ Messräume. Für $f: X \to S$ definiere

$$f^{-1}(B) := \{f \in B\} := \{x \in X : f(x) \in B\}, \quad B \in \mathcal{P}(S),$$

und

$$f^{-1}(\mathcal{S}) := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{S}\}.$$

Dann heißt f *$\mathcal{A}$-$\mathcal{S}$-messbar*, falls für alle $B \in \mathcal{S}$ gilt $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ (d.h., falls $f^{-1}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{A}$ gilt).

b) Falls $(S, \mathcal{S}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ oder $(S, \mathcal{S}) = (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$, so spricht man statt von $\mathcal{A}$-$\mathcal{S}$-messbaren Funktionen nur von *$\mathcal{A}$-messbaren*.

c) Falls (X, τ) ein topologischer Raum ist, so betrachtet man üblicherweise die Borel-σ-Algebra $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$. In diesem Fall heißt eine bezüglich $\mathcal{A}$ messbare Funktion *Borel-messbar* oder einfach nur *messbar*. $\Diamond$

Bemerkung 2.2. a) Jede konstante Funktion ist messbar bezüglich jeder σ-Algebra.

b) Sind $f: (X, \mathcal{A}) \to (S_1, \mathcal{S}_1)$ und $g: (S_1, \mathcal{S}_1) \to (S_2, \mathcal{S}_2)$ messbar, so auch $g \circ f: (X, \mathcal{A}) \to (S_2, \mathcal{S}_2)$. Denn es gilt

$$(g \circ f)^{-1}(\mathcal{S}_2) = f^{-1}(g^{-1}(\mathcal{S}_2)) \subset f^{-1}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{A}.$$

c) Die Schreibweisen $\{f \in B\}$ sind insbesondere in der Stochastik üblich, z.B. $\{f \geq 0\} := \{x \in X : f(x) \geq 0\}$. In der Stochastik heißen messbare Funktionen $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ auch Zufallsvariablen und messbare Funktionen $f: X \to \mathbb{R}^n$ Zufallsvektoren.

Lemma 2.3. Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(S, \mathcal{S})$ Messräume und $\mathcal{S} = \sigma(\mathcal{E})$ (d.h., $\mathcal{E}$ ist ein Erzeugendensystem von $\mathcal{S}$) Dann ist $f: X \to S$ genau dann $\mathcal{A}$-$\mathcal{S}$-messbar, wenn $f^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$.

Korollar 2.4. Seien $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum und $f: X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sind äquivalent.

(i) f ist $\mathcal{A}$-messbar.
(ii) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt $\{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{A}$.
(iii) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt $\{x \in X : f(x) \geq a\} \in \mathcal{A}$.
(iv) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt $\{x \in X : f(x) < a\} \in \mathcal{A}$.
(v) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt $\{x \in X : f(x) \leq a\} \in \mathcal{A}$.

Die analoge Aussage gilt für Funktionen $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$.

Satz 2.5 Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum.

a) Falls X topologischer Raum ist und $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$, so sind alle stetigen Funktionen messbar.
b) Sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge $\mathcal{A}$-messbarer Funktionen $f_n: X \to \overline{\mathbb{R}}$. Dann sind auch die Funktionen $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ $\mathcal{A}$-messbar.
c) Der Grenzwert einer punktweise konvergenten Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathcal{A}$-messbarer Funktionen ist $\mathcal{A}$-messbar.
d) Seien $f, g: X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-messbar und $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig, so ist auch $h: X \to \mathbb{R}$, $h(x) := F(f(x), g(x))$ $\mathcal{A}$-messbar. Insbesondere sind mit f und g auch $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$, $f \pm g$, $f \cdot g$ $\mathcal{A}$-messbar, ebenso $|f|^r$ für $r > 0$ und f^r für $r \in \mathbb{N}$.

2.2 Das Lebesgue-Integral

Im folgenden sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Definition 2.6. a) Eine Stufenfunktion (oder Treppenfunktion oder einfache Funktion) ist eine Funktion $f: X \to \mathbb{R}$ der Form $f = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{A_i}$ mit $c_i \in \mathbb{R}$ und $A_i \in \mathcal{A}$.

b) $B(X; \mathbb{R}) = B(X, \mathcal{A}; \mathbb{R})$ bezeichne den Raum aller beschränkten messbaren Funktionen $f: X \to \mathbb{R}$.

Satz 2.7 a) Zu jeder messbaren Funktion $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ existiert eine Folge $\{s_k\}_k$ von Stufenfunktionen mit $s_k(x) \to f(x)$, $x \in X$.
Falls zusätzlich $f \geq 0$ gilt, so kann man eine monoton wachsende Folge $\{s_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ finden.

b) Sei $f \in B(X; \mathbb{R})$. Dann existiert eine Folge von Stufenfunktionen, welche gleichmäßig gegen f konvergiert. Der Raum der Stufenfunktionen liegt somit dicht in $B(X; \mathbb{R})$ bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$-Norm.

Definition 2.8 (Integral). a) Sei $s = \sum_{j=1}^{k} c_j \chi_{A_j}$ eine Stufenfunktion mit $s \geq 0$. Definiere das Integral von s bzgl. μ durch

$$\int s \, d\mu := \sum_{j=1}^{k} c_j \mu(A_j) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

b) Sei nun $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar mit $f \geq 0$. Definiere

$$\int f \, d\mu := \sup \left\{ \int s \, d\mu : s \text{ Stufenfunktion mit } 0 \leq s \leq f \right\} \in [0, \infty].$$

c) Falls $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, definiert man

$$\int f \, d\mu := \int f_+ \, d\mu - \int f_- \, d\mu \qquad (2.1)$$

mit $f_+ = \max\{f, 0\}$, $f_- = -\min\{f, 0\}$, falls nicht beide Integrale den Wert $+\infty$ haben.

d) Eine Funktion $f: X \to \mathbb{R}$ heißt (Lebesgue-) integrierbar, falls f messbar ist und beide Integrale in (2.1) endlich sind. Die Menge aller integrierbaren Funktionen wird mit $\mathcal{L}^1(\mu) = \mathcal{L}^1(X, \mu) = \mathcal{L}^1(X)$ bezeichet. Andere Schreibweisen sind etwa

$$\int f(x)\, d\mu(x) := \int f \mu(dx) := \int f d\mu.$$

Der Index „1“ wird manchmal unten geschrieben: $L_1(\mu)$. Falls $\mu = \lambda$ das Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^n$ ist, so schreibt man $\int f(x)\, dx$.

e) Für $A \in \mathcal{A}$ definiert man

$$\int_A f\, d\mu := \int \chi_A f\, d\mu.$$

Wir schreiben $\mathcal{L}^1(A) := \mathcal{L}^1(\mu|_A)$.

Satz 2.9 (Elementare Eigenschaften des Lebesgue-Integrals). Seien $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar und $A \in \mathcal{A}$.

a) Sei zunächst f beschränkt und $\mu(X) < \infty$. Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

b) Ist $a \le f(x) \le b$, $x \in A$, und $\mu(A) < \infty$, so gilt

$$a\mu(A) \le \int_A f\, d\mu \le b\mu(A).$$

c) Monotonie: Sind $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ mit $f \le g$, so ist

$$\int f\, d\mu \le \int g\, d\mu.$$

d) Homogenität: Sind $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, so gilt $\alpha f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und

$$\int \alpha f\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu.$$

e) Ist A eine μ-Nullmenge, so gilt $\int_A f\, d\mu = 0$.

f) Ist $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$, so ist $f \in \mathcal{L}^1(A, \mu|_A)$.

Satz 2.10 (Maße durch Dichten). Sei $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar mit $f \ge 0$. Definiere $\varphi_f: \mathcal{A} \to [0, \infty]$ durch

$$\varphi_f(A) := \int_A f\, d\mu, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Dann ist φ_f ein Maß.

Korollar 2.11 Sei $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ und seien $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ disjunkt mit $A = \dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Dann gilt

$$\int f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f\, d\mu.$$

Korollar 2.12 Seien $f \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ und $A \in \mathcal{A}$. Falls $N \in \mathcal{A}$ eine Nullmenge ist, so folgt

$$\int_A f \, d\mu = \int_{A \cup N} f \, d\mu.$$

Bemerkung 2.13. Die Aussagen von Korollar 2.11 und Korollar 2.12 gelten auch für messbare Funktionen $f \geq 0$, wobei dann das Integral auch den Wert ∞ annehmen kann. Denn der wesentliche Beweisschritt liegt in der Anwendung von Satz 2.9 - e), der für messbare Funktionen gilt. ◁

Lemma 2.14. Seien $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar mit $f = g$ μ-f.ü. und $f \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$. Dann gilt auch $g \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$, und

$$\int f \, d\mu = \int g \, d\mu.$$

Lemma 2.15. a) Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, so gilt $\mu(\{x \in X : f(x) \in \{-\infty, +\infty\}\}) = 0$.
b) Ist $f \geq 0$ messbar mit $\int f \, d\mu = 0$, so ist $f = 0$ μ-f.ü.

Lemma 2.16. Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar.
a) Es gilt $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ genau dann, wenn $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$ gilt. In diesem Fall ist

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu.$$

b) Majorantenkriterium: Sei $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ mit $|f| \leq g$ μ-f.ü. Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.