3. Konvergenzsätze

Es gibt gegenüber dem Riemann-Integral sehr starke Konvergenzsätze (z.B. Sätze von der majorisierten Konvergenz und von der monotonen Konvergenz). Es zeigt sich, dass wir das Lebesgue-Integral als Verallgemeinerung des Riemann-Integrals auffassen können.

3.1 Die wichtigsten Konvergenzsätze

Im folgenden sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Satz 3.1 (Satz von Lebesgue über monotone Konvergenz). Sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen mit $0 \le f_1 \le f_2 \le \dots$, und sei $f: X \to [0,\infty]$ definiert durch $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in X$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu.$$

Satz 3.2 (Additivität des Integrals) Seien $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Dann ist $f_1 + f_2 \in \mathcal{L}^1(\mu)$, und es gilt

$$\int (f_1+f_2)\, d\mu = \int f_1 \, d\mu + \int f_2 \, d\mu.$$

Satz 3.3 Seien $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer messbarer Funktionen und $f: X \to [0,\infty]$ definiert durch $f := \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Dann gilt

$$\int f \, d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \, d\mu.$$

Falls $f_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $n \in \mathbb{N}$, und die Summe auf der rechten Seite konvergiert, so gilt $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, und die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ konvergiert μ-fast überall in X.

Satz 3.4 (Lemma von Fatou) Seien $\{f_n\}$ eine Folge nichtnegativer messbarer Funktionen und $f: X \to [0,\infty]$ definiert durch $f := \liminf_{n\to\infty} f_n$ (d.h., $f(x) := \liminf_{n\to\infty} f_n(x) := \lim_{n\to\infty} (\inf\{f_k(x), k \ge n\})$).
Dann gilt

$$\int f \, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Satz 3.5 (Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz). Sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen. Der Grenzwert $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existiere μ-fast überall (d.h., $\mu(\{x \in X : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \{-\infty, \infty\}\}) = 0$). Weiter existiere $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ mit $|f_n(x)| \le g(x)$ für μ-fast alle $x \in X$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, und es gilt

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Satz 3.6 (Parameterabhängigkeit von Integralen). Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $a \in U$ und $f : X \times U \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Für alle $y \in U$ sei $f(\cdot, y) : X \to \mathbb{R}$ μ-integrierbar. Definiere

$$g : U \to \mathbb{R}, \quad g(y) = \int f(\cdot, y) \, d\mu = \int f(x, y) \, d\mu(x).$$

a) Für alle $x \in X$ sei $f(x, \cdot) : U \to \mathbb{R}$ stetig in a, und es existiere eine μ-integrierbare Funktion $h : X \to [0, \infty]$ mit

$$|f(x,y)| \le h(x), \quad (x,y) \in X \times U.$$

Dann ist auch g stetig in a.

b) Für alle $x \in X$ sei $f(x, \cdot) : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar in U, und es existiere eine μ-integrierbare Funktion $h : X \to [0, \infty]$ mit

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y_i}(x,y)\right| \le h(x), \quad (x,y) \in X \times U, \ 1 \le i \le n.$$

Dann ist auch g stetig differenzierbar in a, und es gilt

$$\frac{\partial g}{\partial y_i}(a) = \int \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, a) \, d\mu(x), \quad i = 1, \dots, n.$$

Satz 3.7. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger. Falls f Riemann-integrierbar ist, so ist f Lebesgue-integrierbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) = \int f \, d\lambda,$$

wobei links das Riemann-Integral und rechts das Lebesgue-Integral stehen.

Korollar 3.8. Jede Jordan-messbare Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist Lebesgue-messbar, und Jordan-Inhalt und Lebesgue-Maß von A sind gleich.

3.2 Die L^p-Räume

Wieder sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Definition 3.9 Eine Funktion $f: X \to \mathbb{C}$ heißt (Lebesgue-) integrierbar falls $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ gilt. Wir schreiben dann auch $f \in \mathcal{L}^1(\mu;\mathbb{C})$ oder $f \in \mathcal{L}^1(X;\mathbb{C})$ bzw. auch $f \in \mathcal{L}^1(\mu;\mathbb{R})$ für reellwertige Funktionen. Für $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ wird $\int f\,d\mu$ durch

$$\int f\,d\mu = \int \operatorname{Re} f\,d\mu + i\int \operatorname{Im} f\,d\mu$$

definiert.

Bemerkung 3.10. Die Messbarkeit einer Funktion $f: X \to \mathbb{C}$ ist wie üblich als Borel-Messbarkeit definiert (also $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\mathbb{C})$-Messbarkeit). Insbesondere folgt aus der Stetigkeit der Abbildungen $z \mapsto \operatorname{Re} z$, $(z_1,z_2) \mapsto z_1+z_2$, $(z_1,z_2) \mapsto z_1 z_2$ und $z \mapsto |z|$: Eine Funktion $f: X \to \mathbb{C}$ ist genau dann messbar, wenn $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f: X \to \mathbb{R}$ messbar sind. Sind f, g messbar, so auch $f \pm g$, $f \cdot g$ und $|f|$. ◊

Lemma 3.11. Sei $f: X \to \mathbb{C}$ messbar. Dann gilt $f \in \mathcal{L}^1(\mu,\mathbb{C})$ genau dann, wenn $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu;\mathbb{R})$ gilt.

Bemerkung 3.12. Die obigen Sätze der Integrationstheorie gelten genauso für komplexwertige Funktionen. ◊

Definition 3.13 (L^p-Räume) a) Für $1 \le p < \infty$ sei $\mathcal{L}^p(\mu)$ die Menge aller messbaren Funktionen $f: X \to \mathbb{C}$ mit $\|f\|_p := \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p} < \infty$.

b) Für $p=\infty$ bezeichnet $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ die Menge aller messbaren Funktionen $f: X \to \mathbb{C}$, für welche ein $C_f > 0$ existiert mit $\mu(\{x \in X : |f(x)| > C_f\}) = 0$. Das sind die <u>$\mu$-fast überall beschränkten Funktionen</u>. Wir definieren
$$\|f\|_\infty := \inf\{C \in \mathbb{R} : \mu(\{x \in X : |f(x)| > C\}) = 0\}.$$
c) Für $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ schreiben wir $\mathcal{L}^p(\mu; \mathbb{R})$. Manchmal verwenden wir auch $\mathcal{L}^p(\mu; \mathbb{C})$ statt $\mathcal{L}^p(\mu)$.

<u>Satz 3.14</u> a) (Höldersche Ungleichung). Für $1 \le p, q \le \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt
$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q \quad \text{für } f \in \mathcal{L}^p(\mu),\ g \in \mathcal{L}^q(\mu).$$
b) (Minkowski-Ungleichung). Für $1 \le p \le \infty$ gilt
$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p \quad \text{für } g, f \in \mathcal{L}^p(\mu).$$
c) Für $1 \le p \le \infty$ ist der Raum $\mathcal{L}^p(\mu)$ ein Vektorraum, und $\|\ \|_p$ definiert eine Semi-/Halbnorm auf $\mathcal{L}^p(\mu)$, d.h., es gelten:
$$\|f\|_p \ge 0 \quad \text{für } f \in \mathcal{L}^p(\mu),$$
$$\|\alpha f\|_p = |\alpha|\,\|f\|_p \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{C},\ f \in \mathcal{L}^p(\mu),$$
$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p \quad \text{für } f, g \in \mathcal{L}^p(\mu).$$

<u>Definition und Satz 3.15</u> (L^p-Räume). Sei $1 \le p < \infty$. Definiere auf $\mathcal{L}^p(\mu)$ die Äquivalenzrelation $\sim$ durch
$$f \sim g :\iff \mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0$$
(d.h., durch Gleichheit μ-fast überall). Die Menge der Äquivalenzklassen $\{[f] : f \in \mathcal{L}^p(\mu)\}$ wird mit $L^p(\mu)$ bezeichnet.
Auf $L^p(\mu)$ wird repräsentantenweise eine Vektorraumstruktur definiert: $\alpha[f] := [\alpha f]$ und $[f] + [g] := [f+g]$ für $\alpha \in \mathbb{C}$ und $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Analog definieren wir
$$\|[f]\|_p := \|f\|_p, \quad f \in \mathcal{L}^p(\mu).$$
Damit wird $(L^p(\mu), \|\cdot\|)$ zu einem normierten Vektorraum.

<u>Bemerkung 3.16.</u> Im folgenden wird für $\mathcal{L}^p(\mu)$ in der Schreibweise nicht zwischen $[f]$ und f unterschieden. Wichtig ist bei dieser Betrachtung, dass es für „Funktionen" $f \in L^p(\mu)$ im allgemeinen keinen Sinn macht, vom Wert $f(x)$ an einer Stelle $x \in X$ zu sprechen. Denn falls $\mu(\{x\}) = 0$, so kann man den Repräsentanten f an einer Stelle x ändern, ohne die Äquivalenzklasse zu ändern. ◊