4. Produktmaße und der Satz von Fubini

Seien $(X_i, \mathcal{A}_i)$, $i=1,\dots,n$, endlich viele Messräume. Dazu betrachte das kartesische Produkt
$$X := X_1 \times \dots \times X_n = \prod_{i=1}^n X_i .$$

<u>Definition 4.1.</u> Die Menge
$$\mathcal{Z} := \{A_1 \times \dots \times A_n : A_i \in \mathcal{A}_i, i=1,\dots,n\} \subset \mathcal{P}(X)$$
heißt <u>Gesamtheit der Zylindermengen</u> (bezüglich der $\mathcal{A}_i$).
$$\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n := \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i := \sigma(\mathcal{Z})$$
heißt <u>Produkt-σ-Algebra</u> der $\mathcal{A}_i$.

<u>Bemerkung 4.2.</u> Es lässt sich zeigen, dass $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt. ◊

Seien $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, $1 \le i \le n$, endlich viele Maßräume.

<u>Definition 4.3.</u> Ein Maß $\mu : \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i \to [0,\infty]$ heißt <u>Produktmaß</u> der μ_i, wenn gilt
$$\mu(A_1 \times \dots \times A_n) = \prod_{i=1}^n \mu_i(A_i) \qquad \text{für alle } A_i \in \mathcal{A}_i, 1 \le i \le n,$$
(mit der Konvention $0 \cdot \infty = 0$).

Wir konstruieren das Produktmaß nur für zwei Faktoren. Produkte höherer Ordnung definiert man dann induktiv in Verbindung mit geeigneten Assoziativitätsüberlegungen.
Achtung: Die Existenz und Eindeutigkeit des Produktmaßes ist nur für das Produkt σ-endlicher Maßräume gewährleistet.

<u>Lemma 4.4.</u> Seien $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, $i=1,2$, σ-endliche Maßräume und sei

$f : X_1 \times X_2 \to [0,\infty]$ $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$-messbar. Dann gelten:

a) Für jedes $x \in X_1$ ist $f(x,\cdot) : X_2 \to [0,\infty]$ $\mathcal{A}_2$-messbar.

b) $x \longmapsto \int f(x,\cdot)\, d\mu_2 = \int f(x,y)\, d\mu_2(y)$ ist $\mathcal{A}_1$-messbar.

c) Es existiert ein eindeutiges Produktmaß $\mu_1 \otimes \mu_2$ auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, das wie folgt gegeben ist:

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A) = \int \left(\int \chi_A(x,\cdot)\, d\mu_2 \right) d\mu_1(x) = \int \left(\int \chi_A(\cdot,y)\, d\mu_1 \right) d\mu_2(y)$$

Bemerkung 4.5. a) $(\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 = \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3) =: \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \mu_3$ usw. für höhere Produkte. Denn die Gleichung stimmt für beliebige $A = A_1 \times A_2 \times A_3 \in \mathcal{Z}$ (iteriertes Ausrechnen des Integrale), und gibt ein Produktmaß auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3$. Der Eindeutigkeitssatz für Maße liefert wie vorhin die Behauptung.

b) Für das Lebesgue-Maß $\lambda_n : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ folgt insbesondere

$$\lambda_n = \bigotimes_{i=1}^n \lambda_1,$$

denn beide Seiten stimmen auf $\mathcal{I}_n$ überein.

c) Die Voraussetzung der σ-Endlichkeit ist für die Aussage von Lemma 4.4-c) wesentlich. ◊

Satz 4.6 (Tonelli) Seien $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, $i=1,2$, zwei σ-endliche Maßräume sowie $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ das Produktmaß auf der Produkt-σ-Algebra $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Sei $f : X_1 \times X_2 \to [0,\infty]$ $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$-messbar. Dann gilt in $[0,\infty]$ die Gleichheit

$$\int f\, d\mu = \int \left(\int f(x,y)\, d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y) = \int \left(\int f(x,y)\, d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x).$$

Satz 4.7 (Fubini). Seien $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, $i=1,2$, zwei σ-endliche Maßräume sowie $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ das Produktmaß auf der Produkt-σ-Algebra $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Sei $f : X_1 \times X_2 \to \mathbb{C}$ mit $f \in \mathcal{L}^1(\mu; \mathbb{C})$, d.h.,

f sei integrierbar bzgl. des Produktmaßes.

a) Es gelten $N := \{x \in X_1 \mid \int |f(x,y)| \, d\mu_2(y) = \infty\} \in \mathcal{A}_1$ und $\mu_1(N) = 0$.

b) Definiere $g: X_1 \to \mathbb{C}$ durch

$$g(x) = \begin{cases} \int f(x,y) \, d\mu_2(y), & x \notin N, \\ 0, & x \in N. \end{cases}$$

Dann ist $g \in \mathcal{L}^1(\mu_1, \mathbb{C})$, und es gilt

$$\int f \, d\mu = \int g \, d\mu_1 = \int \left(\int f(x,y) \, d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x).$$

Die entsprechende Aussage gilt mit vertauschten Rollen von μ_1 und μ_2. Insbesondere ist

$$\int \left(\int f(x,y) \, d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) = \int \left(\int f(x,y) \, d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y).$$

<u>Korollar 4.8</u> (Cavalieri-Prinzip). Für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und $t \in \mathbb{R}$ sei

$$A_t := \{(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : (x_1, \ldots, x_{n-1}, t) \in A\}$$

der Schnitt zum Wert t. Dann ist $A_t \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$, und

$$\lambda_n(A) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_{n-1}(A_t) \, dt.$$

<u>Korollar 4.9</u>. Seien $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1})$ und $f: D \to \mathbb{R}$ Borel-messbar. Dann gilt $\operatorname{graph} f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und $\lambda_n(\operatorname{graph} f) = 0$. Insbesondere hat jede Hyperebene im $\mathbb{R}^n$ Lebesgue-Maß 0.