5. Der Transformationssatz

Der Transformationssatz ist der letzte große Satz der Lebesgueschen Integrationstheorie. Die Anwendungen des Transformationssatzes sind bereits aus der Analysis 2 bekannt.

5.1 Einige spezielle Maße

Definition und Satz 5.1. Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(Y, \mathcal{B})$ ein Messraum und $\Phi: X \to Y$ messbar. Dann ist

$$\mu \circ \Phi^{-1}: \mathcal{B} \to [0, \infty], \; (\mu \circ \Phi^{-1})(B) := \mu(\Phi^{-1}(B)), \; B \in \mathcal{B},$$

ein Maß, das Bildmaß von μ unter Φ.

Lemma 5.2 (Transformationslemma). Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(Y, \mathcal{B})$ ein Messraum und $\Phi: X \to Y$ messbar. Sei weiter $f: X \to \mathbb{C}$ $\mathcal{B}$-messbar. Dann ist f genau dann $\mu \circ \Phi^{-1}$-integrierbar, wenn $f \circ \Phi$ μ-integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int (f \circ \Phi) \, d\mu = \int f \, d(\mu \circ \Phi^{-1}).$$

Beispiel 5.3 (Maße mit Dichten). Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f: X \to [0, \infty]$ messbar. Dann ist nach Satz 2.10 durch

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu \quad , A \in \mathcal{A},$$

ein Maß gegeben. Eine messbare Funktion $g: X \to \mathbb{C}$ ist genau dann ν-integrierbar, wenn $g \cdot f$ μ-integrierbar ist. Es gilt dann

$$\int g \, d\nu = \int g \cdot f \, d\mu.$$

Dies folgt genauso wie im Beweis des Transformationslemmas:

$$\int \chi_A \, d\nu = \nu(A) = \int_A f \, d\mu = \int \chi_A f \, d\mu,$$

d.h., die Aussage gilt für $g = \chi_A$. Nun geht es wie beim Beweis des Transformationslemmas weiter. Man sagt, das Maß besitzt die μ-

Dichte f und schreibt $\nu = f \cdot \mu$. In symbolischer Schreibweise $d\nu = f d\mu$. Die Dichte f heißt auch Radon-Nikodym-Ableitung von ν nach μ, symbolisch $f = \frac{d\nu}{d\mu}$. $\diamond$

Beispiel 5.4 (Zählmaß). Seien $X \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und $\zeta: \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$, $\zeta(A) = |A|$, das Zählmaß aus Beispiel 1.6-c). Eine Funktion $f: X \to \mathbb{C}$ heißt summierbar, wenn

$$\sum_{x\in X} |f(x)| := \sup \{ \sum_{x\in E} |f(x)| : E \subset X \text{ endlich} \} < \infty.$$

In diesem Fall ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge $E_n = \{|f| \geq \frac{1}{n}\}$ endlich, denn wenn $E_N = \{|f| \geq \frac{1}{N}\}$ z.B. unendlich ist, so können wir wegen $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_N \subset E_{N+1} \subset \ldots$ sagen, dass E_n für alle $n \geq N$ unendlich ist. Wir können daher eine Folge auswählen mit $x_k \in E_{N+k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, $x_k \neq x_j$ für $k \neq j$. Es folgen $|f(x_k)| \geq \frac{1}{N+k-1}$ $k \in \mathbb{N}$, und $\sum_{x\in X} |f(x)| \geq \sum_{k=1}^{m} |f(x_k)| \geq \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{N+k-1} \to \infty$, $m \to \infty$. ↯

Damit ist $\{f \neq 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{|f| \geq \frac{1}{n}\}$ abzählbar, etwa $\{f \neq 0\} = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f(x_n)|$ ist dann absolut konvergent, und nach dem Umordnungssatz ist der Wert der Reihe unabhängig von der Summationsreihenfolge. Damit ist

$$\sum_{x\in X} |f(x)| := \sum_{n\in\mathbb{N}} f(x_n)$$

wohldefiniert.

Eine Funktion $f: X \to \mathbb{C}$ ist genau dann summierbar, wenn f ζ-integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\sum_{x\in X} f(x) = \int f \, d\zeta.$$

Denn offensichtlich gilt für endliche $E \subset X$ die Gleichheit $\int_E f \, d\zeta = \sum_{x\in X} f(x)$. Falls f ζ-integrierbar ist, so ist

$$\sup \{ \sum_{x\in X} |f(x)| : E \subset X \text{ endlich} \} = \sup \{ \int_E |f| \, d\zeta : E \subset X \text{ endlich} \} \leq \int |f| \, d\zeta < \infty,$$

d.h., f ist summierbar. Im summierbaren Fall gilt für $E_n = \{|f| \geq \frac{1}{n}\}$ nach dem Satz von der monotonen Konvergenz

$$\sum_{x\in X} |f(x)| \nwarrow \sum_{x\in E_n} |f(x)| = \int_{E_n} |f| \, d\zeta \nearrow \int |f| \, d\zeta.$$

Dies zeigt die Äquivalenz der Integrierbarkeit und Summierbarkeit wie auch die Gleichheit von Summe und Integral für den Fall $f \geq 0$. Der allgemeine Fall $f: X \to \mathbb{C}$ folgt durch die übliche Zerlegung. ◊

5.2 Der Transformationssatz

Satz 5.5 (Transformationssatz). Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi: U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus.

a) Es gilt $\lambda \circ \Phi = |\det \Phi'(\cdot)| \cdot \lambda$ als Gleichheit von Maßen auf $\mathcal{B}(U)$. Dabei steht auf der linken Seite das Bildmaß von λ unter Φ^{-1}, auf der rechten Seite das Maß mit Dichte $|\det \Phi'(\cdot)|$, wobei Φ' die Jacobimatrix von Φ bezeichnet.

b) Sei $f: V \to \mathbb{C}$ messbar. Dann ist f über $V = \Phi(U)$ genau dann λ-integrierbar, wenn $(f\circ\Phi)\cdot|\det \Phi'|: U \to \mathbb{C}$ λ-integrierbar über U ist. Es gilt dann

$$\int_{\Phi(U)} f(y)\, dy = \int_U f(\Phi(x))\, |\det \Phi'(x)|\, dx.$$