Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Dr. Matthias Kotschote

Übungen zur Vorlesung
Analysis 2, Sommersemester 2009
Serie 1

1. Aufgabe (6 Punkte):

(a) Sei $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ stetig differenzierbar und monoton wachsend. Die Ableitung f' sei monoton fallend. Es gelte $f(0) = 0$ und $f(x) > 0$, $\forall x > 0$. Zeigen Sie, daß $d(x, y) := f(|x - y|)$ eine Metrik ist. Bleibt die Aussage gültig auch ohne die Voraussetzung f ist monoton wachsend?

(b) Zeigen Sie, daß insbesondere $d(x, y) := \arctan(|x - y|)$ eine Metrik auf $\mathbb{R}$ ist.

2. Aufgabe (6 Punkte):

(a) Sei $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}, \xi_k \in \mathbb{R}\}$ der Raum aller (nicht notwendigerweise konvergenten) reellen Folgen versehen mit der Metrik

$$d(x, y) := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|}$$

wobei $x = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $y = (\eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie, daß diese Reihe konvergiert und eine Metrik auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist. Die Elemente $x_n = (\xi_{nk})_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ $(n \in \mathbb{N})$ konvergieren genau dann für $n \to \infty$ bezüglich d gegen $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, wenn alle Komponenten ξ_{nk}, $k \in \mathbb{N}$, für $n \to \infty$ in $\mathbb{R}$ gegen ξ_k konvergieren.

(b) Sei M eine beliebige Menge und $m, n \in M$. Zeigen Sie, daß

$$d(m, n) := \begin{cases} 0 & \text{falls } m = n \\ 1 & \text{falls } m \neq n \end{cases}$$

eine Metrik auf M ist. (Sie heißt die triviale bzw. diskrete Metrik.)

3. Aufgabe (4 Punkte):
Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $a \in X$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $d(\cdot, a) :\to \mathbb{R}$, $x \to d(x, a)$ stetig ist.

Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und ausreichend zu begründen. Abgabe der Lösungen am 04.05.09.