Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Dr. Matthias Kotschote

Analysis 2
Serie 2

1. Aufgabe (4 Punkte):
Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $A, B \subset X$. Man zeige die folgenden Identitäten und Inklusionen und finde in (b) und (d) je ein Beispiel, bei dem die Inklusion strikt ist.

(a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
(b) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$
(c) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$
(d) $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$

$(int(A) := A^\circ := \{a \in A : \exists r > 0 : B(x,r) \subseteq A\}$, $A^\circ \subseteq A)$

2. Aufgabe (6 Punkte):

(a) Zeigen Sie, daß die 'Zeilensummennorm'

$$\|A\| := \max_{1 \le k \le m} \sum_{l=1}^{n} |a_{kl}|$$

eine Norm auf dem Matrizenraum $M_{m,n}(\mathbb{K})$ ist, wobei $A = [a_{kl}]$ und $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

(b) Es seien die Zahlen $a_1 > 0, \ldots, a_n > 0$ fest gegeben. Für $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{K}^n$ definiere man die 'gewichtete 1-Norm' durch $\|x\|_a := \sum_{k=1}^n a_k |x_k|$. Zeigen Sie, daß dies in der Tat eine Norm auf $\mathbb{K}^n$ ist und finden Sie Konstanten $c > 0$ und $c' > 0$, so daß $c\|x\|_1 \le \|x\|_a \le \|x\|_1$ für $x \in \mathbb{K}$.

3. Aufgabe (2 Punkte):
Zeigen Sie, daß die Kugeln $B(x, r)$ in einem normierten Vektorraum X mit Norm $\|x\|$ für alle $x \in X$ und $r > 0$ konvex sind.

4. Aufgabe (4 Punkte):
Bestimmen Sie M°, $\overline{M}$, ∂M und die isolierten Punkte von

$$M = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \le 1, \quad y = \sin(1/x)\}.$$

Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und ausreichend zu begründen. Abgabe der Lösungen am 11.05.09., 12.00 Uhr.