Unversität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Dr. Matthias Kotschote

Analysis 2
Serie 3

1. Aufgabe (4 Punkte):
Die Räume der konvergenten Folgen, bzw. der Nullfolgen, sind durch

$$c := \{x = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}} : \xi_k \in \mathbb{K},\ \exists \lim_{k\to\infty} \xi_k\},$$
$$c_0 := \{x = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}} : \xi_k \in \mathbb{K},\ \lim_{k\to\infty} \xi_k = 0\}, \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass c und c_0 abgeschlossene Untervektorräume von l^∞ (der Raum aller beschränkter Folgen normiert mit Supremumsnorm $\|x\|_\infty := \sup_{k\in\mathbb{N}} |\xi_k|$) bzgl. der Supremumsnorm $\|x\|_\infty$ sind. Bestimmen Sie den Abschluss des Raums der endlichen Folgen c_{00} in l^∞.

2. Aufgabe (4 Punkte):

(a) Sei $f \in \mathrm{C}(X;\mathbb{R})$, X zusammenhängend. Dann ist $f(X)$ ein Intervall.

(b) Sei $f : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$, stetig und injektiv. Sei D kompakt. Dann existiert f^{-1} und ist stetig ($f^{-1} : R(f) \to \mathbb{R}^n$).

3. Aufgabe (2 Punkte):
Es sei (A_n) eine konvergente Folge in $\mathcal{L}(X, Y)$ mit Grenzwert A, und (x_n) sei eine konvergente Folge in X mit Grenzwert x. Man beweise, dass $(A_n x_n)$ in Y gegen Ax konvergiert.

4. Aufgabe (4 Punkte):
$A \in End(\mathbb{R}^n) := \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ (Raum der Endomorphismen bzgl. $\mathbb{R}^n$) besitze bzgl. der Standardbasis die Darstellungsmatrix $[a_{kl}]$. Für $X_j := (\mathbb{R}^n, |\cdot|_j)$ mit $j = 1, 2, \infty$ gilt dann: $A \in \mathcal{L}(E_j)$ mit

(i) $\|A\|_{\mathcal{L}(E_1)} = \max_l \sum_k |a_{kl}|$;

(ii) $\|A\|_{\mathcal{L}(E_2)} \leq (\sum_{k,l} |a_{kl}|^2)^{1/2}$;

(iii) $\|A\|_{\mathcal{L}(E_\infty)} = \max_k \sum_l |a_{kl}|$.

5. Aufgabe (2 Punkte):
Man zeige, dass $\delta : B(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ definiert durch $\delta f = f(0)$ zu $\mathcal{L}(B(\mathbb{R}^n), \mathbb{R})$ gehört, und man bestimme $\|\delta\|$. $B(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)| < \infty\}$

Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und ausreichend zu begründen. Abgabe der Lösungen am 11.05.09., 12.00 Uhr.