Unversität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Dr. Matthias Kotschote

Analysis 2
Serie 4

1. Aufgabe (2 Punkte):
Zeigen Sie: Sei $\|x\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}$. Dann existiert eine Konstante $c > 0$, so dass $\|x\| = c|x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. Aufgabe (2 Punkte):
An welchen Punkten ist die folgende Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{xy^2}, & x \neq 0,\ y \neq 0, \\ \frac{1}{y}, & x = 0,\ y \neq 0, \\ \frac{1}{x}, & x \neq 0,\ y = 0, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

2. Aufgabe (6 Punkte):
Zeigen Sie oder widerlegen Sie:

1. Die Funktion $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ ist gleichmäßig stetig auf
$$M := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k, \quad A_k := B(z_k, R_k), \quad z_k = (2^{-(2k-1)}, 2^{-(2k-1)}), \quad R_k = 2^{-(2k-1)}.$$
2. Die Funktion $\phi(x) = \frac{\|x\|_\infty}{\|x\|_2} x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist Lipschitz-stetig.
3. Die Funktion $\psi(x,y) = \frac{\cos(y)^2 - e^y + \sin(x)^2}{e^x + (\cos(x) + \sin(y))^2}$ ist gleichmäßig stetig auf M.

3. Aufgabe (2 Punkte):
Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktion $f : D \to \mathbb{R}^2$.

(a) $f(x,y) = (y^2 \ln(xy), x + \cos(x/y))^T$, $D = (0,\infty) \times (0,\infty)$,

(b) $f(x,y) = (x - 2x^2 + 3xy, y - y^2 - 2xy)^T$, $D = \mathbb{R}^2$.

4. Aufgabe (4 Punkte):
Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ 0, & (x,y)^T = (0,0)^T. \end{cases}$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\partial_x f(x,y)$ und $\partial_y f(x,y)$ für alle $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie dann $\partial_x \partial_y f(0,0)$ und $\partial_y \partial_x f(0,0)$.

Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und ausreichend zu begründen. Abgabe der Lösungen am 25.05.09., 12.00 Uhr.