Unversität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Dr. Matthias Kotschote

Analysis 2
Serie 5

1. Aufgabe (2 Punkte):
Finden Sie für ein $n \in \mathbb{N}$ Ihrer Wahl jeweils eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$, so dass die Mengen

$$(i) \quad M,\, \overset{\circ}{M},\, \overline{M},\, \overline{\overset{\circ}{M}}, \overset{\circ}{\overline{M}} \qquad (ii) \quad M,\, \overset{\circ}{M},\, \overline{M},\, \overline{\overset{\circ}{M}},\, \overset{\circ}{\overline{M}},\, \overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{M}}},\, \overline{\overset{\circ}{\overline{M}}}$$

paarweise verschieden sind.

2. Aufgabe (4 Punkte):
Es seien $K_n \neq \emptyset$ kompakte Mengen eines normierten Vektorraumes mit der Eigenschaft $K_{n+1} \subset K_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann ist der Durchschnitt $K := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$ kompakt. *Hinweis: Um zu zeigen, dass $K \neq \emptyset$ gilt, wähle man eine Folge $x_n \in K_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

3. Aufgabe (4 Punkte):
(a) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $D = \mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)^T\}$ und $f(x) = \|x\|_2^\alpha$ für $x \in D$. Berechnen Sie $\partial_{x_l} f$, $\partial_{x_k}\partial_{x_l} f$ und $\Delta f(x) := \partial_{x_1}^2 f(x) + \partial_{x_2}^2 f(x) + \partial_{x_3}^2 f(x)$ für $x \in D$ und $k, l = 1, 2, 3$. Für welche α gilt $\Delta f(x) = 0$, $\forall x \in D$?
(b) Man zeige, dass die Funktion $u(t,x) = (2\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp(-\frac{\|x\|_2^2}{4t})$ für $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$ die 'Diffusionsgleichung' $\partial_t u(t,x) = \Delta u(t,x)$ erfüllt.

4. Aufgabe (2 Punkte):
Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt positiv homogen vom Grad $\alpha \in \mathbb{R}$, falls gilt

$$f(tx) = t^\alpha f(x), \quad t > 0, \quad x \in X\backslash\{0\}.$$

Man zeige: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$. f ist genau dann positiv homogen vom Grad α, wenn die Eulersche Homogenitätsrelation $(\nabla f(x)|x) = \alpha f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, erfüllt ist

5. Aufgabe (4 Punkte):
Es sei $f : (0,\infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f : \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $g(x,y) := f^{-1}(x,y)$ und die Ableitungen $g'(x,y)$, $f'(r,\phi)$. Verifizieren Sie damit die Identität $g'(x,y)_{|(x,y)=f(r,\phi)} = f'(r,\phi)^{-1}$.

Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und ausreichend zu begründen. Abgabe der Lösungen am 01.06.09., 12.00 Uhr.