Unversität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Dr. Matthias Kotschote

Analysis 2
Serie 6

1. Aufgabe (6 Punkte):
Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_p^2 f(h) := \sum_{k=0}^2 \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(p)h^\alpha$ zweiten Grades am Entwicklungspunkt $p \in \mathbb{R}^n$

(a) für $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^3 x_3^4$ und $p = (1, 1, 1)^T \in \mathbb{R}^3$;
(b) für $g(x_1, x_2, x_3) = e^{2x_1+3x_3} \cos(x_2)$ und $p = (0, 0, 0)^T \in \mathbb{R}^3$;
(c) für $h(x, y) = (x^y, \sin(x + y))^T$ und $p = (1, 1)^T \in \mathbb{R}^2$.

2. Aufgabe (4 Punkte):
Es seien $f \in \mathrm{C}^2(D; \mathbb{R})$ und $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex. Die Funktion f heißt konvex, wenn $f((1 - \theta)x + \theta y) \leq (1 - \theta)f(x) + \theta f(y)$ für alle $x, y \in D$ und $\theta \in [0, 1]$.

(a) Zeigen Sie, dass f genau dann konvex ist, wenn die Hessematrix $\nabla^2 f(z)$ für alle $z \in D$ positiv semidefinit ist (d.h. $(\nabla^2 f(z)h|h) \geq 0$ für alle $h \in \mathbb{R}^n$ und $z \in D$).
Hinweis: Man betrachte die Funktion $\phi_{x,y}(\theta) := f((1 - \theta)x + \theta y)$, $\theta \in [0, 1]$, für $x, y \in D$.
(b) Welche der folgenden Funktionen mit $(x, y)^T \in D = \mathbb{R}^2$ sind konvex?

$$(a) \quad f(x, y) = x^4 + y^2 - x - y, \quad (b) \quad g(x, y) = \sin(xy).$$

3. Aufgabe (2 Punkte):

(a) Für $u \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ und $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ mit $A^T A = 1$ gilt: $(\Delta u) \circ A = \Delta(u \circ A)$.
(b) Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullumgebung. Von den stetigen Funktionen $f, g : U \mapsto \mathbb{R}$ sei f differenzierbar im Nullpunkt und $f(0) = 0$. Man zeige, dass $\psi(x) := f(x)g(x)$, $\forall x \in U$, im Nullpunkt differenzierbar ist und gebe $\psi'(0)$ an.

4. Aufgabe (4 Punkte):
Das Argument eines Punktes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ wurde als Winkel ϕ in der Polarkoordiantendarstellung von (x, y) eingeführt (siehe Vorlesung und Aufgabe 4. in der Serie 5.). Man betrachte die Argumentfunktion $(x, y) \mapsto \phi(x, y)$ als Abbildung auf dem geschlitzten Kreisring $R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{x \geq 0, y = 0\} : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$, d.h. $\phi : R \mapsto (0, 2\pi)$. Man zeige, dass ϕ auf dem Gebiet R differenzierbar und der Gradient auf R beschränkt ist, und man zeige, dass ϕ nicht global lipschitzstetig ist.

Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und ausreichend zu begründen. Abgabe der Lösungen am 08.06.09., 12.00 Uhr.