Unversität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Dr. Matthias Kotschote

Analysis 2
Serie 7

1. Aufgabe (4 Punkte):

(i) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. Dann gilt: A ist positiv (semi-)definit $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte sind positiv (nichtnegativ). (λ ist Eigenwert von A, falls die Gleichung $Ax = \lambda x$ mindestens eine Lösung $x \neq 0$ besitzt. x wird dann als Eigenvektor zum Eigenwert λ bezeichnet.)

(ii) Es sei $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ symmetrisch. Dann gilt:
  (a) $B = (b_{ij})_{i,j=1,2}$ positiv (negativ) definit $\Leftrightarrow$ $b_{11} > (<)0$ und $det(B) > (>)0$.
  (b) B indefinit $\Leftrightarrow$ $det(B) < 0$.

2. Aufgabe (3 Punkte):
Sei Q_a^3 die Menge aller Quader im $\mathbb{R}^3$, deren Kantenlängensumme gleich a ist. Welcher Quader aus Q_3^3 hat das größte Volumen?

3. Aufgabe (6 Punkte):
Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $rk(A) = n$ (d.h. $m \geq n$) und $b \in \mathbb{R}^m$. Setze $f(x) := |Ax - b|^2 \equiv x^T A^T Ax - b^T Ax - x^T A^T b + b^T b$, d.h. $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}_+$.

(a) $f_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, seien definiert durch $f_1(x) := (c|x) \equiv c^T x$, $c \in \mathbb{R}^n$, $f_2(x) := (x|d) \equiv x^T d$, $d \in \mathbb{R}^n$, und $f_3(x) := (x|Bx) \equiv x^T Bx$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Berechnen Sie die Ableitungen von f_i, $i = 1, 2, 3$.

(b) Bestimmen Sie die Menge der kritischen Punkte von $f(x)$. (Die Ergebnisse aus (a) sind dabei hilfreich.)

(c) An welchen dieser Punkte liegt ein lokales (striktes) Minimum vor?

4. Aufgabe (3 Punkte):
Welche der folgenden Funktionen $f : D \mapsto \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, nimmt ihr Minimum auf D an?

1. $D = \overline{B(0,1)}$, $f(x, y) := xy^2 + e^{3+x^2-y^3}$.
2. $D = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) := x^4 + y^6 - 3xy^2$.
3. $D = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : |xy| \leq 1\}$, $f(x, y) = e^{-|x|+y} \cos(x + y)$.

Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und ausreichend zu begründen. Abgabe der Lösungen am 15.06.09., 12.00 Uhr.