Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Dr. Matthias Kotschote

Analysis 2
Serie 10

1. Aufgabe (4 Punkte):
Untersuchen Sie die Funktion $f(x,y,z) = (x+y+z)^2$ auf dem Ellipsoid $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+2y^2+3z^2 = 1\}$ hinsichtlich lokaler Minimas und Maximas. Wenden Sie im Falle der Maximas das nachfolgende hinreichende Kriterium an. Zeigen Sie, dass diese lokalen Extremas auch global sind.

Satz. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathrm{C}^2(U;\mathbb{R})$, $g \in \mathrm{C}^1(U;\mathbb{R}^m)$, $m < n$, und $rk(g'(x)) = m$ $\forall x \in U$. Existieren Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, so dass $x_0 \in U$ eine kritische Stelle der zugehörigen Lagrange-Funktion F (unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$) ist, und ist die Hesse-Matrix $F''(x_0)$ negativ (positiv) definit auf dem Tangentialraum $Tg(x_0)$, d.h., gilt $(F''(x_0)h|h) < 0 (> 0)$ für alle $h \in Tg(x_0)\backslash\{0\}$, $Tg(x_0) := \{y \in \mathbb{R}^n : (g_i'(x_0)|y) = 0,\ i = 1, \ldots, m\}$, so ist x_0 ein strenges lokales Maximum (Minimum) von f unter der Bedingung $g(x) = 0$. (Was passiert, wenn man alle $h \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ zuläßt?)

2. Aufgabe (4 Punkte):
Berechnen Sie die Länge der folgenden 4 Kurven.

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ t - \cos(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad \beta(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cosh(t) \end{pmatrix}, \quad -1 \le t \le 1,$$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2\cos(t) \\ t^2\sin(t) \\ t^3/3 \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1, \quad \delta(t) = \begin{pmatrix} \cos^3(t) \\ \sin^3(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

3. Aufgabe (4 Punkte):
Zeigen Sie: Die durch $\phi(0) = 0$, $\phi(t) := (t, t^2\cos(\pi/t^2))$ für $t \in (0,1]$, definierte ebene Jordankurve ist differenzierbar in $I = [0,1]$, jedoch nicht stetig differenzierbar und nicht rektifizierbar.

4. Aufgabe (4 Punkte):
Die glatte Kurve C sei durch $\phi \in \mathrm{C}^2(I;\mathbb{R}^n)$ mit $\phi' \neq 0$ dargestellt. Berechnen Sie für eine beliebige Parameterdarstellung die Krümmung κ, den Krümmungsradius $r := 1/\kappa$ und den Krümmungsmittelpunkt μ. ($\mu(s)$ ist definiert als Mittelpunkt desjenigen Kreises mit Radius $1/\kappa(s)$, welcher den Kurvenpunkt $\phi(s)$ von C tangential berührt.)

Zusatz (2 Punkte): In der Situation von Satz 7.14 läßt sich Γ lokal als Graph einer Funktion $\{(u, f(u)) : u \in U\}$ mit $f \in \mathrm{C}^1(U;\mathbb{R}^{n-m})$, $U \subset \mathbb{R}^m$, darstellen. Ebenso läßt sich Γ als Nullstellenmenge $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$ mit $g \in \mathrm{C}^1(W;\mathbb{R}^{n-m})$, $W \subset \mathbb{R}^n$, darstellen.

Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und ausreichend zu begründen. Abgabe der Lösungen am 06.07.09., 12.00 Uhr.