Unversität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Stefan Volkwein
Dr. Matthias Kotschote

# Analysis 2
## Serie 12

**1. Aufgabe** (4 Punkte):
Berechnen Sie die Volumina der folgenden Körper $A \subset \mathbb{R}^3$.

(a) $A$ ist der Schnitt des unendlichen Quaders $[0, \frac{1}{2}] \times [0,1] \times \mathbb{R}$ mit den Halbräumen $z \geq -x - 2y$ und $z \leq 2x + y$.

(b) $A$ wird von dem Dreieck mit den Ecken $(0,0,0)$, $(2,0,0)$ und $(0,1,0)$, der Fläche $z = xy$ und der Ebene $\frac{1}{2}x + y = 1$ begrenzt.

**2. Aufgabe** (4 Punkte):
Man definiere

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3; \qquad \Phi(r,\phi,z) := \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \\ z \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\Phi(\mathbb{R}_+ \times [0,2\pi] \times \mathbb{R}) = \mathbb{R}^3$ und $\Phi$ auf $(0,\infty) \times (0,2\pi) \times \mathbb{R}$ injektiv ist und berechnen Sie $det(\Phi')$. Bestimmen Sie die Volumina des Halbzylinders $Z_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0, 0 \leq z \leq h, 0 \leq x^2 + y^2 \leq R_2^2\}$ und des Hohlzylinders $Z_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq h, R_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq R_2^2\}$ für Konstanten $h > 0$ und $R_2 > R_1 > 0$. Ferner berechne man

$$\int\limits_{Z_2} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\, dxdydz.$$

**3. Aufgabe** (4 Punkte):
Es sei $Q(x) := x^T Ax$ eine positive definite quadratische Form ($x \in \mathbb{R}^n$, $A$ symmetrisch). Man berechne das uneigentliche Integral $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-Q(x)}\, dx$ in Abhängigkeit von den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von $A$.

**4. Aufgabe** (4 Punkte):
Die Kugelkoordinaten sind definiert durch

$$\Phi_3 : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3; \qquad \Phi(r,\phi,z) := (r\cos(\phi)\sin(\theta), r\sin(\phi)\sin(\theta), r\cos(\theta))^T.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\Phi_3(\mathbb{R}_+ \times [0,2\pi] \times [0,\pi]) = \mathbb{R}^3$ und $\Phi_3 : (0,\infty) \times (0,2\pi) \times (0,\pi) \mapsto \mathbb{R}^3 \backslash N$, $N := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y = 0\}$, bijektiv ist und berechnen Sie $det(\Phi')$.
(b) Sei $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}_+$ integrierbar und $R_f := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \times J : |x|_2 \leq f(t)\}$ bezeichne den Rotationskörper, der durch "Drehung des Graphen $f$ um die $t$-Achse" ensteht. Zeigen Sie, dass $|R_f| = \omega_2 \int_a^b (f(t))^2\, dt$, wobei $\omega_n$ das Volumen der $n$-dimensionalen Kugel bezeichnet.

Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten und ausreichend zu begründen. Abgabe der Lösungen am 20.07.09., 12.00 Uhr.