Einführung in die Lineare Algebra (BI/II)
Stichworte zum Inhalt

Gottfried Barthel, FB Mathematik, Uni Konstanz

Studienjahr 2003/04

Aktueller Stand: 29. Juli 2004

Vorbemerkung: Die Grundlage für diese Stichwortsammlung sind die Vorlesungsmitschriften von Friederike Junginger (für das erste Semester) und Mario Kaip (für das zweite Semester); beiden möchte ich für ihre Sorgfalt und Mühe herzlich danken.

Die Stichworte folgen weitgehend dem zeitlichen Ablauf der Vorlesung; gelegentliche Nachträge werden aber möglichst im thematischen Zusammenhang (also nicht unbedingt chronologisch) eingeordnet.

Für $\boxed{\text{KoKoKo}}$ (-rrekturen und -nstruktive -mmentare):

`mailto: Gottfried Barthel <Gottfried.Barthel@uni-konstanz.de>`

Vorkapitel über elementare Vektorrechnung (Versuch einer Motivation)

Skalare

Beispiele $\mathbb{N}_{\geqq 1}, \mathbb{N}_{\geqq 0}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$; Rechenregeln der Addition und der Multiplikation.

Körper, Beispiele $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_2$.

Vektoren in der Ebene; Geraden, allgemeiner Vektorraumbegriff

Ursprung, geometrische Interpretation der Addition, Rechenregeln.

Definition einer (additiv bzw. multiplikativ geschriebenen) abelschen Gruppe; Beispiele; Eindeutigkeit des neutralen Elements und des Inversen.

Multiplikation von Vektoren mit Skalaren, Eigenschaften, Geraden, Koordinatensysteme; Koordinatendarstellung der Rechenoperationen.

Vektorrechnung in $\mathbb{R}^2$, Geradendarstellung (als Lösungsmenge einer linearen Gleichung), Proportionalität; Charakterisierung von Gleichheit, Parallelität und Schnitt anhand der Gleichungen; Übertragung auf $\mathbb{K}^2$ für beliebigen Skalarenkörper $\mathbb{K}$.

Vektorraum über $\mathbb{K}$, Beispiel $\mathbb{K}^n$.

Längen und Winkel in der Ebene; lineare Abhängigkeit; lineare Abbildungen

Orthonormalbasen und zugehörige Koordinatensysteme, Länge („Norm“), Eigenschaften, insbes. Dreiecksungleichung, Winkel und Skalarprodukt von Vektoren; Koordinatendarstellung, Eigenschaften (Bilinearität, Symmetrie, Positive Definitheit); natürliches Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$; Ungleichung von Cauchy-Schwarz: $|\langle x, y\rangle| \leqq \|x\| \cdot \|y\|$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit Gleichheit genau dann, wenn Vektoren linear abhängig sind.

Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren.

Lineare Abbildungen in der Ebene und allgemeiner zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen, durch Bilder der Basisvektoren festgelegt, Darstellung mit Spaltenvektoren und Matrizen; Beispiel Spiegelung.

Vektoren im Anschauungsraum; Ebenen, Vektorprodukt

Basis, Identifikation mit Raum der Zahlentripel $\mathbb{R}^3$.

Ebenen und ihre Koordinatendarstellung; Vektorprodukt („Kreuzprodukt“) in $\mathbb{K}^3$ (dabei $\mathbb{K}$ beliebiger Körper); Eigenschaften, geometrische Interpretation für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; kanonische Basis von $\mathbb{K}^n$; „Rechtssystem“ in $\mathbb{R}^3$; Anwendung des Vektorproduktes auf die Ebenengleichung.

Mehrfachprodukte: „Spatprodukt“ in $\mathbb{K}^3$, geometrische Bedeutung für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ als Volumen, Eigenschaften (Determinantenverhalten!), Berrechnung nach der Regel von Sarrus-Seki.

Dreifaches und vierfaches Vektorprodukt, Entwicklungsregel, Identitäten von Jacobi und Lagrange.

Ergänzende Themen

Familien von Elementen, allgemeines Assoziativ- und Kommutativgesetz in abelschen Gruppen; Permutationen, summierbare Familien, Träger einer Familie.

Vektorräume und lineare Abbildungen (I): Grundbegriffe

Grundbegriffe I: Linearkombinationen, Erzeugendensysteme, freie Familien, Basen, Dimension

Linearkombinationen, lineare Hülle, Untervektorraum (UVR), Beispiele (Geraden in der Ebene und Ebenen im Raum durch den Nullpunkt, reelle Folgen, reelle Nullfolgen, reelle Folgen mit endlichem Träger).

Erzeugendensystem, freie Familien, Basis; Charakterisierung von Basen; zu Basis $\mathcal{B} = (v_i)_{i\in I}$ gehörender Basisisomorphismus $V \to \mathbb{K}^{(I)}$.

Basissatz für endlich erzeugte Vektorräume; Beweisideen: „Ausdünnen“ (Minimieren) von Erzeugendensystemen bzw. „Auffüllen“ (Maximieren) von freien Familien, dazu benötigt: Basisergänzungssatz. Charakterisierung von Basen als maximale freie Familien bzw. minimale Erzeugendensysteme.

„Schwaches Austauschlemma“ (Ersetzen eines einzelnen Basisvektors); Austauschsatz von Steinitz.

Dimensionsbegriff, Dimension von Untervektorräumen, „Ergänzungssatz“ für UVR; komplementäre UVR, Dimensionsformel für komplementäre UVR; Dimensionsformel für Summen.

Summen und („innere“) direkte Summen; Vektorraum $\mathbb{K}[T]$ der Polynome über $\mathbb{K}$ in der „Unbestimmten“ T als Beispiel eines abzählbar-unendlichdimensionalen Vektorraums mit einem echten UVR gleicher Dimension

Grundbegriffe II: Lineare Abbildungen

Homomorphismen, Endomorphismen, lineare Funktionale, Beispiele, u.A. die Auswertungsabbildung $\mathbb{K}^X \to \mathbb{K}$; Beschreibung von linearen Abbildungen durch Zuweisung von Bildern zu Basisvektoren.

$\mathrm{Hom}(V, W)$ als Vektorraum, Komposition linearer Abbildungen.

Bild und Kern von linearen Abbildungen, allgemeiner Bild und Urbild von UVR unter linearen Abbildungen, Rang und Defekt.

Charakterisierung von Injektivität, Surjektivität, Bijektivität von linearen Abbildungen mittels Kern und Bild, Verhalten von Familien (erzeugende, freie, Basen) unter linearen Abbildungen.

Linearität der Umkehrabbildung einer bijektiven linearen Abbildung, Isomorphismen, Automorphismen, Isomorphie-Invarianz der Dimension.

Dimensionsformel für lineare Abbildungen, Äquivalenz von Injektivität, Surjektivität, Bijektivität für lineare Abbildungen zwischen VR mit gleicher Dimension.

Grundbegriffe III: Lineare Abbildungen und Matrizen

Zuordnung $\mathbb{K}^{n\times m} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$; Komposition und Matrizenmultiplikation, Eigenschaften der Matrizenmultiplikation: Bilinearität, Assoziativität, aber i.A. keine Kommutativität (Beispiel), nicht nullteilerfrei.

Isomorphismen und invertierbare („reguläre“) Matrizen, Einheitsmatrix, allgemeinen lineare Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$; Eindeutigkeit der inversen Matrix.

Allgemeiner Gruppenbegriff, Beispiele: $\mathrm{Aut}(V), S_n, \mathbb{K}^\times = (\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$; Gruppenhomomorphismen und -isomorphismen (erst später nachgetragen!)

Spezielle Typen von invertierbaren Matrizen: Eliminations- und Permutationsmatrizen. Symmetrische Gruppe S_n.

Rang von Matrizen; Zeilenstufenform, obere Dreiecksmatrizen.

Transformation auf Zeilenstufenform, Gaussꜱsches Eliminationsverfahren; Verfeinerung: Gauss-Jordan-Normalform; Anwendung: Bestimmung der Inversen einer invertierbaren Matrix.

Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme (LGS), Matrixdarstellung ($A \cdot x = b$), Lösbarkeitskriterium ($\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}(A|b)$ von Frobenius et al.).

Lösungsverfahren, homogene und inhomogene lineare Gleichungssysteme, „spezielle“ und „allgemeine“ Lösung eines inhomogenen LGS; allgemeine Lösung eines homogenen LGS. Kriterien für universelle und für eindeutige Lösbarkeit.

Vektorräume, lineare Abbildungen und Matrizen (II)

Matrixdarstellung von linearen Abbildungen, Koordinatentransformation und Basiswechsel

Basisisomorphismen und darstellende Matrizen für lineare Abbildungen zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen, Koordinatentransformation und Basiswechsel, Transformationsmatrix, allgemeine Transformationsformel.

Äquivalenz von Matrizen; Kriterium (Ranggleichheit), „Normalform“ als Blockmatrix aus $I_r = E_r$ (die $(r \times r)$-Einheitsmatrix) und passenden Nullmatrizen.

Dualität

Dualraum $V^* := \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$, Basen und duale Basen im endlich-dimensionalen Fall, [Exkurs: kanonischer Isomorphismus $\mathrm{Hom}(\mathbb{K}, V) \cong V$].

Dualräume und lineare Abbildungen, Dual einer linearen Abbildung, Matrixdarstellung bzgl. dualer Basispaare mittels transponierter Matrix.

Bidualitätssatz: Natürlicher injektiver Homomorphismus $V \to V^{**}$, endlich-dimensionaler Fall: $V \cong V^{**}$.

Dualität und Untervektorräume: Zu UVR $U \subset V$ betrachte $U^0 := \{\varphi \in V^* \ ; \ \varphi|_U = 0\}$; Identifikation $(U^0)^0 \cong U$ im endlich-dimensionalen Fall (mittels Bidualität!).

Dualräume und lineare Abbildungen (II): Beziehung $\mathrm{Bild}\, f^* = (\mathrm{Kern}\, f)^0$ usw..

Anwendung auf lineare Gleichungssysteme.

Endomorphismen und quadratische Matrizen: Determinanten und Eigenwerte

Determinanten (I): Axiomatische Einführung

Versuch einer Motivation: Auftreten im Spatprodukt, bei der Gauss-Elimination, bei der Lösung von (2×2)-LGS (Spezialfall der Cramerschen Regel).

Axiomatische Einführung (nach Weierstrass): Geforderte Eigenschaften der Determinante: multilinear, alternierend, normiert; Folgerungen, u.a. „Determinantenproduktsatz“.

Einschub zum Beweis des Produktsatzes: Interpretation der Gauss-Elimination im Faktorisierungssatz; Multiplikation von (oberen bzw. unteren) Dreiecksmatrizen.

Permutationen; Determinanten (II): Konstruktion

Permutationen, Ordnung der symmetrischen Gruppe $\#(S_n) = n!$, „Fehlstände“, Signum, Transpositionen, Multiplikativität des Signums, Darstellbarkeit von Permutationen als Produkt von Transpositionen, die alternierende Gruppe A_n.

Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Determinanten: Existenz mittels der Formel von Leibniz.

Berechnung: Effizient mittels Gauss-Elimination.

„Komplementärmatrix“ $A^\#$ einer quadratischen Matrix; Streichungsmatrizen, Determinantenformel für Block-Dreiecksmatrizen, Lemma: $A \cdot A^\# = A^\# \cdot A = (\det A) \cdot I_n$.

Entwicklungssatz von Laplace, Cramersche Regel.

Determinante eines Endomorphismus; Ähnlichkeit von quadratischen Matrizen.

Ausblick: Volumenberechnung und Orientierung.

Eigenwerte und Eigenvektoren von Endomorphismen

Definition von Eigenwerten (EW) und Eigenvektoren (EV), diagonalisierbare Endomorphismen, Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten bilden freie Familie.

Charakteristisches Polynom eines Endomorphismus bzw. einer quadratischen Matrix; ist Ähnlichkeitsinvariante; Nullstellen sind genau die Eigenwerte.

Diagonalisierbarkeit bei zerfallendem charakteristischen Polynom mit getrennten Nullstellen. Algebraische und geometrische Vielfachheit von Eigenwerten.

Ausblick: JORDAN-Matrizen und JORDANsche Normalform.

Ausblick: Euklidische und unitäre Vektorräume

Grundbegriffe

Erinnerung an die Eigenschaften des Skalarproduktes in der Ebene bzw. im Raum, euklidische Vektorräume, euklidische Norm, Orthogonalität, Ungleichung von CAUCHY-SCHWARZ.

Unendlich-dimensionales Beispiel: $V = \mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ VR der stetigen Funktionen auf Intervall mit Skalarprodukt $s(f,g) := \int_a^b f(x){\cdot}g(x)\,dx$.

Verallgemeinerung: „Punktprodukt“ (kanonisches inneres Produkt auf $\mathbb{K}^n$: $\big((x_i)\cdot(y_i)\big) := \sum_{i=1}^n x_i y_i$) ist nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform; aber aus $s(v,v) = 0$ folgt nicht notwendig $v = 0$ (Beispiel: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}^2$, $v = e_1 + i * e_2$).

Unitäres Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$; Eigenschaften: linear in der ersten, „konjugiert-linear“ in der zweiten Variablen, „konjugiert-symmetrisch“, positiv definit.

Ende des ersten Teils

Wiederholung und Ergänzung zum Schluss des ersten Teils

Eigenwerte, Eigenvektoren, Jordansche Normalform; Trigonalisierbarkeit

Definition, Diagonalisierbarkeit, Eigenwerte sind Nullstellen des charakteristischen Polynoms; geometrische und algebraische Vielfachheit; Beispiel $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, JORDANsche Normalform.

Trigonalisierbarkeit; Charakterisierung trigonalisierbarer Endomorphismen (charakteristisches Polynom zerfällt in Linearfaktoren).

Skalarprodukte, Normen und Winkel, Orthonormalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt

Definition, Eigenschaften, Beispiele; Normen, Dreiecksungleichung und Ungleichung von CAUCHY-SCHWARZ.

Winkel, Orthogonalität, Orthonormalfolgen und -basen. Orthogonalisierungsverfahren von GRAM-SCHMIDT.

Bilinearformen und Sesquilinearformen auf endlich-dimensionalen Vektorräumen im allgemeinen Fall

Grundbegriffe

Erinnerung an Eigenschaften des „Punktprodukts“ auf $\mathbb{K}^n$ (über beliebigem Skalarenkörper); Bilinearformen; Typen: symmetrisch, alternierend, nicht ausgeartet; duale Paarung.

Kleiner Exkurs in die Algebra: Charakteristik eines Körpers.

Komplexer Fall: „Sesquilinearform“ (linear in einer, „konjugiert-linear“ in der anderen Variablen); hermitesche Formen (d.h. „konjugiert-symmetrisch“). [Konvention der Vorlesung: Sesquilinearformen sind linear in der ersten und konjugiert-linear in der zweiten Variablen.]

Zu einer Bilinearform assoziierte quadratische Form; Umkehrung: Rekonstruktion einer symmetrischen Bilinearform aus der assoziierten quadratischen Form (im Fall $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$).

Matrixdarstellung von Bilinear- und Sesquilinearformen

Matrixdarstellung (bzgl. fester Basis); Beziehung zwischen Formen und darstellenden Matrizen; Isomorphismus $\operatorname{Bil}(V) \cong \mathbb{K}^{n\times n}$.

Komplexer Fall: Sesquilinearformen bilden komplexen Vektorraum; hermitesche Formen bilden nur reellen, aber keinen komplexen VR.

Verhalten bei Basiswechsel, Transformationsformel.

Bilinearformen und Dualräume

Bilinearformen entsprechen umkehrbar eindeutig den Homomorphismen $V \to V^*$ via $\operatorname{Bil}(V) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Hom}(V, V^*)$, $s \mapsto s'$ mit $s' \colon V \to V^*$, $v \mapsto s(v, ?) = [w \mapsto s(v, w)]$ und $s'' \colon V \to V^*$, $w \mapsto s(?, w) = [v \mapsto s(v, w)]$; bzgl. fester Basis $\mathcal{B}$ von V und dualer Basis $\mathcal{B}^*$ von V^* wird s'' durch $M_{\mathcal{B}}(s)$ dargestellt. [Hinweis: DIe Abbildung s'' wurde in der Vorlesung zunächst mit $\hat{s}$ bezeichnet.]

Komplexer Fall, s Sesquilinearform, dann ist s'' eine Abbildung $V \to V^*$, aber nur „konjugiert-linear“

Interpretation der Dualabbildung $(s')^* \colon V^{**} \cong V \to V^*$ (stimmt mit s'' überein); damit Beschreibung des symmetrischen bzw. alternierenden Falls.

Charakterisierung von nicht-ausgearteten Formen (s' injektiv, also auch s'' injektiv)

Orthogonalität (I): allgemeiner Fall

Betrachten „inneres Produkt“ (d.h. nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform); Orthogonalität von Vektoren: $v \perp w \iff s(v, w) = 0$; isotrope Vektoren; Orthogonalraum $U^\perp$ zu gegebenem UVR; Beziehung $s'(U^\perp) = U^0$.

Endomorphismen im euklidischen und unitären Fall

Orthogonalität (II), orthogonale bzw. unitäre Endomorphismen und Matrizen

Orthogonalität in euklidischen bzw. unitären VR; orthogonales Komplement, orthogonale direkte Summe.

Orthogonale bzw. unitäre Endomorphismen, Eigenschaften, insbesondere Normtreue und Verhalten bzgl. ONB, Eigenwerte ($|\lambda| = 1$); Umkehrung: Normtreue und „ONB-Treue“ implizieren Orthogonalität.

Orthogonale bzw. unitäre Matrizen, Charakterisierung, Gruppeneigenschaft.

Diagonalisierbarkeit von unitären Endomorphismen

Invarianz des orthogonalen Komplements eines invarianten UVR, Diagonalisierbarkeitssatz.

Normalform für orthogonale Endomorphismen

Der Fall kleiner Dimensionen: Die Gruppe SO_2; Spiegelungen in der Ebene; Diskussion des dreidimensionalen Falls: Für $A \in \mathrm{O}_3$ ist $\det A$ stets Eigenwert; falls auch $-\det A$ ein Eigenwert ist, dann ist A diagonalisierbar.

Allgemeiner Fall: Orthogonale Transformationen ohne reelle Eigenwerte haben invariante Ebenen; „Normalformensatz“ (Zerlegung in eine orthogonale Summe von ein- und zweidimensionalen invarianten Unterräumen)

Diagonalisierbarkeit von selbstadjungierten bzw. hermiteschen Endomorphismen und Matrizen

Definition, Matrixdarstellung; Diagonalisierbarkeitssatz; Lemmata: alle Eigenwerte sind reell; Eigenräume zu verschiedenen EW sind orthogonal; Invarianz des orthogonalen Komplements eines invarianten UVR.

Beweis im reellen Fall mit Methoden der Analysis: Eigenwerte als Extrema der quadratischen Form auf der Einheitssphäre.

Hauptachsentransformation, Definitheit, Sylvesterscher Trägheitssatz

Satz von der Hauptachsentransformation, Beispiel zur geometrischen Bedeutung; Folgerung: Definitheitskriterium; Test mittels der Vorzeichenregel von Descartes.

„Orthogonale“ Zerlegung eines reellen Vektorraums bzgl. einer symmetrischen Bilinearform; Ausartungsraum; Positivitäts-, Negativitäts- und Nullkegel; Semidefinitheit; Trägheitssatz von Sylvester; Folgerungen.

Determinantenkriterium für Definitheit (von Jacobi und Hurwitz).

(Symmetrische) Bilinearformen und bilineare Abbildungen im allgemeinen Fall (II)

Orthogonalisierungssatz für symmetrische Bilinearformen, Diagonalisierung von symmetrischen Matrizen durch „symmetrisches Umformen“

Existenz einer Orthogonalbasis für symmetrische Bilinearformen über Körpern mit $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$, Konstruktion durch „symmetrisches Umformen“ (simultane Zeilen- und Spaltenoperationen); Bestimmung der Transformationsmatrix.

Beispiele, Alternativverfahren: „Quadratische Ergänzung“.

Bilineare Abbildungen, Algebren

Definition einer bilinearen Abbildung $b\colon U \times V \to W$; partielle Abbildungen $b'\colon U \to \operatorname{Hom}(V, W)$, $u \mapsto b(u, ?)$ und $b''\colon V \to \operatorname{Hom}(U, W)$; Beispiele (vor allem für nicht ausgeartete Abbildungen).

$\mathbb{K}$-Algebren (nicht notwendig assoziativ); Beispiele: $\mathbb{K}^3$ mit Vektorprodukt, $\mathbb{K}$-wertige Funktionen, Polynom- und formale Potenzreihenalgebren; Einsetzungshomomorphismus $\mathbb{K}[T] \to \mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ (bei endlichen Körpern nicht injektiv!); Matrizen- und Endomorphismenalgebren.

Vektorräume mit innerem Produkt und adjungierte Abbildungen

Durch inneres Produkt s auf V definierter Isomorphismus $\Psi_s\colon V \to V^*$; Identifikation einer ON-Basis und ihrer dualen Basis.

Adjungierte Abbildung $f^{\text{adj}}\colon W \to V$ zu $f\colon V \to W$ zwischen VR mit innerem Produkt; Eigenschaft: $s_W(f(v), w) = s_V(v, f^{\text{adj}}(w))$; Matrixdarstellung; $(f^{\text{adj}})^{\text{adj}} = f$.

Orthogonalität zwischen Kernen und Bildern: $\operatorname{Kern} f^{\text{adj}} = (\operatorname{Bild} f)^{\perp}$, $\operatorname{Bild} f^{\text{adj}} = (\operatorname{Kern} f)^{\perp}$.

Verschärfung für Endomorphismen von VR mit innerem Produkt ohne isotrope Vektoren.

Endomorphismen von unitären Vektorräumen (II): Adjungierte und normale Endomorphismen

Adjungierte Endomorphismen auf komplexen Vektorräumen mit nichtausgearteter hermitescher Form

Konstruktion, Eigenschaften, Anwendung auf den unitären Fall. „Ortho-diagonalisierbare Endomorphismen“ (d.h. mit einer ON-Basis aus Eigenvektoren).

„Ortho-Diagonalisierbarkeit“ von normalen Endomorphismen unitärer Vektorräume

„Ortho-diagonalisierbare Endomorphismen“ sind normal; Beziehung zwischen Kern und Bild ($\operatorname{Kern} f = \operatorname{Kern} f^{\text{adj}}$, $\operatorname{Bild} f = \operatorname{Bild} f^{\text{adj}}$, $V = \operatorname{Kern} f \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Bild} f$) bei normalen Endomorphismen; Folgerung für Eigenräume: $\operatorname{ER}(f, \lambda) = \operatorname{ER}(f^{\text{adj}}, \overline{\lambda})$; „Ortho-Diagonalisierbarkeitssatz“ für normal Endomorphismen.

Lineare Äquivalenzrelationen, Quotientenvektorräume

Äquivalenzrelationen

Erinnerung; Beispiele: durch Abbildung definierte ÄR; durch Partition definierte ÄR; algebraisches Beispiel: $\mathbb{Z}/(m)$.

Durch lineare Abbildungen definierte ÄR, Vektorraumstruktur auf Menge der Äquivalenzklassen („Fasern“); Beschreibung der ÄR: $(v \sim_f v') \iff (v - v' \in \operatorname{Kern} f)$

Quotientenvektorräume

Quotientenvektorraum V/U, kanonische Projektion $\pi_U\colon V \to V/U$ mit $\operatorname{Kern} \pi_U = U$; „Wohldefiniertheit“ der VR-Operationen (unabhängig von der Repräsentantenwahl); Dimensionsformel.

Homomorphiesatz, kanonische Faktorisierung von linearen Abbildungen

Homomorphiesatz; Zusätze; kanonische Faktorisierung $V \to V/\operatorname{Kern} f \xrightarrow{\cong} \operatorname{Bild} f \hookrightarrow W$ eines Homomorphismus $f\colon V \to W$ in Quotientenprojektion, Bijektion, Inklusion.

Identifikation $(V/U_1)\,/\,(U_2/U_1) \cong V/U_2$ im Fall $V \supset U_2 \supset U_1$ („Zweiter Isomorphiesatz“).

Grundbegriffe der Ringtheorie

Grundlegende Definitionen und Beispiele

Definition, Einselement, kommutativer Ring; Beispiele: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/(m)$, Körper, Quoternionen, Ringe von quadratischen Matrizen bzw. von Endomorphismen, Nullring, Menge von ringwertigen Abbildungen $R^X = \operatorname{Abbdg}(X, R)$ (dabei X eine beliebige Menge, R ein Ring); (Links- bzw. Rechts-) Nullteiler, Integritätsringe (oder -bereiche) (nullteilerfrei und kommutativ mit $1 \neq 0$).

Formale Potenzreihen- und Polynomringe

Konstruktion als Menge der Folgen $R^{\mathbb{N}}$ bzw. Folgen mit endlichem Träger $R^{(\mathbb{N})}$ über beliebigem Ring bzgl. Cauchy-Produkt $(a_i) \cdot (b_j) = (c_k)$ mit $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$ (Konvention: $\mathbb{N} = \mathbb{N}_{\geqq 0}$).

Symbolische Darstellung $(a_i) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i$ für $(a_i) \in R^{\mathbb{N}}$ bzw. $(a_i) = \sum_{i=0}^{<\infty} a_i T^i$ für $(a_i) \in R^{(\mathbb{N})}$ als formal unendliche bzw. als endliche Linearkombination von Potenzen („formale Potenzreihe“ bzw. „Polynom“) mit einer symbolischen „Unbestimmten“ T; bei Ring mit Eins Identifikation $T^n = e_n = (\delta_{n,i})$.

Nullteilerfreiheit, falls R nullteilerfrei; Ordnung einer formalen Potenzreihe, Grad eines Polynoms; Abschätzungen für Ordnung und Grad bei Summen und Produkten.

Unterringe und Ringhomomorphismen

Definition, Beispiele, u.A. Ring $\mathbb{Z}[i]$ der ganzen Gaussschen Zahlen, obere bzw. untere Dreiecksmatrizen, Zentrum eines Ringes (Hinweis: UVR der symmetrischen Matrizen ist kein Unterring von $\mathbb{K}^{n \times n}$).

Ringhomomorphismen (bei Ringen mit Eins: $f(1_R) = 1_S$), Beispiele: Restklassenabbildung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(m)$; Einsetzungs- und Auswertungshomomorphismen.

Kern und Bild bei Ringhomomorphismen, Ringiso- und -automorphismen.

Ideale und Restklassenringe

Definition von (Links- bzw. Rechts- bzw. zweiseitigen) Idealen, Beispiele: Hauptideale, von Teilmenge erzeugte Ideale, „triviale Ideale": Nullideal $\mathfrak{o}$, R.

Restklassenring $R/\mathfrak{a}$, Wohldefiniertheit der Ringoperationen; Restklassenprojektion.

Homomorphiesatz, Isomorphiesatz ($R/(\operatorname{Kern} f) \cong \operatorname{Bild} f$), kanonische Faktorisierung von Ringhomomorphismen, zweiter Isomorphiesatz.

TIR Teilbarkeit in Integritätsringen

A ***Euklidische Ringe*:** „Euklidische" Division mit Rest in $\mathbb{Z}$ und in $K[T]$, Gradfunktion, euklidische Ringe.

B ***Hauptidealringe* (HIR):** Definition, euklidische Ringe sind HIR; $\mathbb{Z}[T]$ ist *kein* Hauptidealring.

C ***Teilbarkeit*:** Einheiten, Einheitengruppe $R^\times$, Teilbarkeit und Assoziiertheit, Kürzungsregel; idealtheoretische Formulierung. Gemeinsame Teiler und gemeinsame Vielfache, Teilerfremdheit, ggT und kgV; Beschreibung in Hauptidealringen.

D ***Primelemente, irreduzible Elemente*:** Definitionen; Primelemente sind irreduziblel, in HIR sind irreduzible Elemente auch prim.

E ***Primfaktorzerlegung*:** In HIR ist jedes Element ein endliches Produkt von Primelementen; Grund: aufsteigende Idealketten werden stationär. Vergleich von Faktorisierungen mit Primfaktoren bzw. irreduziblen Faktoren; faktorielle Ringe, HIR sind faktoriell; Umkehrung falsch (Beispiel $\mathbb{Z}[T]$ faktoriell, aber kein HIR). Existenz von ggT und kgV

NER Nachträge und Ergänzungen zur Ringtheorie

A ***Nachträge zu Polynomringen*:** Leitkoeffizient und Leitterm, normierte Polynome; Einheitengruppe $R[T]^\times = R^\times$ (dabei sei R ein Integritätsring); in $\mathbb{K}[T]$ sind lineare Polynome irreduzibel (und damit prim), und jedes Ideal hat eindeutig bestimmtes normiertes Erzeugendes. Linearfaktoren und Nullstellen; algebraisch abgeschlossene Körper, Beispiel $\mathbb{C}$, aber nicht $\mathbb{R}$.

B ***Quotientenkörper eines Integritätsringes*:** Konstruktion über Äquivalenzklassen; Körper $\mathbb{K}(T)$ der „rationalen Funktionen"; Beispiel eines Polynoms über einem endlichen Körper, das die Nullfunktion induziert.

Struktur von Endomorphismen

PE Polynome und Endomorphismen

A ***Minimalpolynom eines Endomorphismus, „Begleit-Endomorphismus" eines Polynoms*:** (A.0) Erinnerung: Für $\mathbb{K}$-Vektorraum V ist $\operatorname{End}(V)$ assoziative $\mathbb{K}$-Algebra mit Eins $\mathrm{id}_V =: \mathbf{1}_V$; Einbettung $\mathbb{K} \hookrightarrow \operatorname{End}(V)$, $\lambda \mapsto \lambda \cdot \mathrm{id}_V$ (dabei $V \neq 0$); Bild ist Zentrum von $\operatorname{End}(V)$; Einsetzungshomomorphismus $\varepsilon_f \colon \mathbb{K}[T] \to \operatorname{End}(V)$, $P(T) \mapsto P(f)$;

Bild $\varepsilon_f =: \mathbb{K}[f]$ ist kommutative $\mathbb{K}$-Unteralgebra von $\mathrm{End}(V)$. (A.1) Minimalpolynom M_f, Gradabschätzung; (A.2) Beispiele. (A.3) Konstruktion eines Endomorphismus mit gegebenem Minimalpolynom Q („Begleit-Endomorphismus“: $V = \mathbb{K}[T]/(Q)$, $f\colon [P]_{(Q)} \mapsto [T \cdot P]_{(Q)}$); Matrixdarsstellung bzgl. natürlicher Basis durch „Begleitmatrix“. (A.4) Beispiele; (A.5) Allgemeine Normalform von Endomorphismen (Mitteilung ohne Beweis).

B ***Der Satz von Cayley-Hamilton*:** (B.1) Formulierung und Beweis des Satzes; (B.2) Beispiel: Einsetzen in Matrizengleichung $P_1(T) \cdot P_2(T) = P_3(T)$ über $\mathbb{K}[T]$ kann zu falschen Ergebnissen führen. (B.3) Lemma: Für eine Matrizengleichung $P(T) = Q(T) \cdot (A - TE)$ gilt $P(A) = 0$ (damit Rechtfertigung des Beweises von B.1).

ZE Zerlegung von Endomorphismen

Betrachten (V, f): endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-VR mit festem Endomorphismus.

A ***Grobzerlegung (I)*:** (A.1/2) „Stabile“ f-invariante Zerlegung von (V, f) in nilpotenten und injektiven Teil (aufsteigende Folge der Kerne und absteigende Folge der Bilder von f^j wird beim gleichen Index s stationär; $N :=$ Kern f^s und $B :=$ Bild f^s sind komplementäre UVR, und $f|_B$ ist injektiv); (A.3) Folgerung: Zu jedem EW λ gehört f-invariante Zerlegung $V = N_\lambda \oplus B_\lambda$; Zusatz: Für $\lambda \neq \mu$ gilt $N_\lambda \cap N_\mu = 0$

B–F **Grobzerlegung II und Feinzerlegung:** Siehe Text der letzten Vorlesung (separat).