Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Dr. K. J. Becher
19.4.2007

Übungen zur Topologie

Blatt 1

Aufgabe 1:
Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Jeder Vektorraum über einem Körper besitzt eine Basis.
(b) Zu zwei beliebigen Mengen X und Y gibt es stets eine injektive Abbildung $X \longrightarrow Y$ oder eine injektive Abbildung $Y \longrightarrow X$.
(c) Zu jeder surjektiven Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ gibt es eine injektive Abbildung $g : Y \longrightarrow X$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Aufgabe 2:
Zeigen Sie, dass es eine wohlgeordnete Menge $(X, \prec)$ mit einem größten Element η gibt derart, dass X überabzählbar ist, während für jedes $a \in X \setminus \{\eta\}$ die Menge $X_a = \{x \in X \mid x \prec a\}$ abzählbar ist.
(Hinweis: Wählen Sie zunächst auf einer überabzählbaren Menge H eine Wohlordnung $\prec$ und betrachten Sie die Menge der $a \in H$, für die $H_a = \{x \in H \mid x \prec a\}$ überabzählbar ist.)

Aufgabe 3:
Finden Sie jeweils eine angeordnete Menge $(X, \prec)$, die

(a) genau ein maximales Element und unendlich viele minimale Elemente hat.
(b) genau ein maximales Element hat, das jedoch kein größtes Element ist.

Aufgabe 4:
Gibt es injektive Abbildungen $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow X$, so gibt es auch eine Bijektion $h : X \longrightarrow Y$. Um dies zu beweisen setzte man

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} (g \circ f)^n (X \setminus g(Y))$$

und zeige, dass h wie folgt gewählt werden kann:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für} \quad x \in A\,, \\ g^{-1}(x) & \text{für} \quad x \in X \setminus A\,. \end{cases}$$

Abgabe: Dienstag 24.4.07 in der Vorlesung
Übungsstunde: Mittwoch 14h15-16h00 in D404