Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Dr. K. J. Becher
19.6.2007

Übungen zur Topologie

Blatt 10

Aufgabe 40:
Zeigen Sie, dass in einem Produkt über eine Familie nichtleerer topologischer Räume $(X_\alpha)_{\alpha\in I}$ gerade dann jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt, wenn dies in jedem Raum X_α $(\alpha \in I)$ der Fall ist und zudem die Menge $\{\alpha \in I \mid |X_\alpha| > 1\}$ abzählbar ist.

Aufgabe 41:
Zeigen Sie, dass ein Produkt über eine Familie nichtleerer topologischer Räume genau dann ein T_3-Raum ist, wenn jeder Faktor ein T_3-Raum ist.

Aufgabe 42:
Seien (X, d) ein metrischer Raum, $\alpha \in \,]0, \infty[$ und $f : [0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[\,,\ t \longmapsto \frac{\alpha t}{1+t}$.
Zeigen Sie:

(a) f ist streng monoton steigend und für $s, t \in [0, \infty[$ gilt $f(s) < \alpha$ und $f(s + t) \leq f(s) + f(t)$.
(b) $\delta = f \circ d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine Metrik, welche dieselbe Topologie auf X induziert wie d und mit $\delta(x, y) < \alpha$ für alle $x, y \in X$. (vgl. Aufgabe 16)

Definition:
Eine nichtleere Teilmenge U eines topologischen Raumes X heißt *irreduzibel*, wenn es keine in U echten abgeschlossenen Teilmengen $A, B \subsetneq U$ mit $U = A \cup B$ gibt. Eine irreduzible Teilmenge $U \subseteq X$, die in keiner echt größeren irreduziblen Teilmenge von X enthalten ist, wird als eine *irreduzible Komponente von* X bezeichnet.

Aufgabe 43:
Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie:

(a) Es sind äquivalent:
  (i) X ist irreduzibel.
  (ii) Jede nichtleere offene Teilmenge von X ist dicht in X.
  (iii) Je zwei nichtleere offene Teilmengen von X haben nichtleeren Schnitt.
(b) Genau dann ist $Y \subseteq X$ irreduzibel, wenn $\overline{Y}$ irreduzibel ist.
(c) Jede irreduzible Komponente von X ist abgeschlossen.
(d) Jede irreduzible Teilmenge von X ist in einer irreduziblen Komponente enthalten.

Aufgabe 44:
Charaktersieren Sie die irreduziblen Teilmengen eines Hausdorffraumes, sowie eines Raumes, der die Kofinaltopologie trägt.

Abgabe: Dienstag 26.6.07 in der Vorlesung.