Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
K. J. Becher
24.4.2007

Übungen zur Topologie

Blatt 2

Aufgabe 5:
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für $a \in X$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ seien

$$\begin{aligned} B_\varepsilon(a) &= \{x \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\} \text{ und} \\ \overline{B}_\varepsilon(a) &= \{x \in X \mid d(x,y) \leq \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass das Teilmengensystem

$$\mathcal{T} = \{U \subset X \mid \forall\, x \in U\, \exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : B_\varepsilon(x) \subset U\}$$

eine Topologie auf X ist. Zeigen Sie weiter, dass bezüglich dieser Topologie $B_\varepsilon(a)$ offen und $\overline{B}_\varepsilon(a)$ abgeschlossen ist. Ist $\overline{B}_\varepsilon(a)$ der Abschluss von $B_\varepsilon(a)$?

Aufgabe 6:
Zeigen Sie:

(a) In einem Hausdorffraum sind alle endlichen Teilmengen abgeschlossen.
(b) Auf einer beliebigen Menge ist die kofinale Topologie die gröbste Topologie, in der alle endlichen Teilmengen abgeschlossen sind.
(c) Eine Menge ist genau dann endlich, wenn auf ihr die kofinale Topologie hausdorffsch ist.

Aufgabe 7:
In einem topologischen Raum X definiert man den *Rand* einer Teilmenge $A \subset X$ als $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$.

(a) Zeigen Sie, dass ∂A aus denjenigen Punkten $a \in X$ besteht, für die jede Umgebung von a sowohl ein Element von A als auch ein Element von $X \setminus A$ enthält.
(b) Geben Sie ein Beispiel an, dass zeigt, dass ∂A innere Punkte besitzen kann.

Aufgabe 8:
Sei X eine Menge und sei $c : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ eine Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Es ist $c(\emptyset) = \emptyset$.
(ii) Für $Y \in \mathcal{P}(X)$ ist $Y \subset c(Y)$.
(iii) Für $Y \in \mathcal{P}(X)$ ist $c(c(Y)) = c(Y)$.
(iv) Für $Y, Z \in \mathcal{P}(X)$ ist $c(Y \cup Z) = c(Y) \cup c(Z)$.

Zeigen Sie, dass es genau eine Topologie auf X gibt, bezüglich der $c(Y)$ der Abschluss von Y ist für jede Teilmenge $Y \subset X$.

Abgabe: Mittwoch 2.5. in der Übungsstunde