Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Dr. K. J. Becher
3.5.2007

Übungen zur Topologie

Blatt 3

Aufgabe 9:
Auf $\mathbb{R}$ bilden die halboffenen Intervalle $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ (mit $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$) die Basis einer Topologie $\mathcal{T}$. Der topologische Raum $X = (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ heißt die *Sorgenfrey-Gerade*. Zeigen Sie:

(i) $\mathcal{T}$ ist eine Verfeinerung der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}$.
(ii) Der Raum X ist hausdorffsch und separabel.
(iii) Jeder Punkt von X hat eine abzählbare Umgebungsbasis.
(iv) X besitzt keine abzählbare Basis und ist nicht metrisierbar.

Definition:
Sei $(X, \leq)$ eine geordnete Menge. Für $a,b \in X$ mit $a \leq b$ und $a \neq b$ schreibt man $a < b$. Man verwendet die Symbole ∞ und $-\infty$ zur Bezeichnung von Elementen außerhalb von X und setzt die Anordnung $\leq$ auf $X \cup \{\pm\infty\}$ fort, indem man $-\infty < x < \infty$ für alle $x \in X$ festlegt. Mit $a,b \in X \cup \{\pm\infty\}$ schreibt man

$$]a,b[= \{x \in X \mid a < x < b\}\,.$$

Die von allen Mengen $]-\infty, a[$ und $]a, \infty[$ mit $a \in X$ erzeugte Topologie auf X heißt die (durch $\leq$ gegebene) *Ordnungstopologie*.

Aufgabe 10:
Sei $(X, \leq)$ eine total geordnete Menge. Wir betrachten X als topologischen Raum in der Ordnungstopologie. Zeigen Sie:

(a) X ist ein Hausdorffraum.
(b) Die offenen Intervalle $]a,b[$ mit $a,b \in X \cup \{\pm\infty\}$ mit $a < b$ bilden eine Basis von X.
(c) Für $Y \subset X$ ist die Spurtopologie auf Y feiner als die durch $\leq$ auf Y definierte Ordnungstopologie.
(d) Ist $X = \mathbb{R}$ und ist $\leq$ die übliche Anordnung der reellen Zahlen, so ist die Spurtopologie auf $Y = \{-1\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$ verschieden von der durch $\leq$ auf Y definierten Ordnungstopologie.

Aufgabe 11:
Sei X ein topologischer Raum, dessen Topologie von einer Metrik $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ induziert ist. Zeigen Sie, dass auf jeder Teilmenge $Y \subset X$ die Spurtopologie von der eingeschränkten Metrik $d|_Y : Y \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ induziert wird.

Aufgabe 12:
Sei $\mathcal{T}$ eine Topologie auf der Menge X und sei $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ genau dann eine Basis von $\mathcal{T}$ ist, wenn $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ gilt und es zu $V \in \mathcal{T}$ und $x \in V$ stets ein $U \in \mathcal{B}$ gibt mit $x \in U \subset V$.

Abgabe: Dienstag 8.5. in der Vorlesung