Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Dr. K. J. Becher
8.5.2007

Übungen zur Topologie

Blatt 4

Aufgabe 13:
Zeigen Sie, dass jede konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein Intervall ist und außerdem, sofern sie mehr als nur einen Punkt enthält, als Unterraum homöomorph zu genau einem der Intervalle $]0,1[$, $[0,1[$ und $[0,1]$ ist.

Aufgabe 14:
Sei $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass die Produkttopologie auf $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie übereinstimmt.

Aufgabe 15:
Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Zeigen Sie:

(a) Für $A \subset X$ ist $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
(b) Für $B \subset Y$ ist $f^{-1}(B^\circ) \subset (f^{-1}(B))^\circ$ und $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.

Aufgabe 16:
Sei X eine Menge und seien d_1 und d_2 zwei Metriken auf X und dazu $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ die auf X jeweils induzierten Topologien. Sei weiter $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ eine streng monoton wachsende Funktion, die in 0 stetig ist und mit $f(0) = 0$. Zeigen Sie:

(a) Ist $d_1 \leq f \circ d_2$, so gilt $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$.
(b) Ist $d_1 \geq f \circ d_2$, so gilt $\mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T}_2$.

Aufgabe 17:
Sei X ein topologischer Raum und seien A und B abgeschlossene Unterräume von X mit $X = A \cup B$. Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ in einen topologischen Raum Y genau dann stetig ist, wenn die Einschränkungen $f|_A : A \longrightarrow Y$ und $f|_B : B \longrightarrow Y$ beide stetig sind.

Abgabe: Dienstag 15.5. in der Vorlesung