Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Dr. K. J. Becher
22.5.2007

Übungen zur Topologie

Blatt 6

Aufgabe 22:
Sei X ein topologischer Raum und sei $x \in X$ ein Punkt, der eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt. Zeigen Sie, dass x genau dann Häufungspunkt einer gegebenen Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ ist, wenn diese eine gegen x konvergierende Teilfolge enthält.

Aufgabe 23:
Seien M eine Menge und $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(M)$. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{F} = \{V \in \mathcal{P}(M) \mid \text{es gibt } U \in \mathcal{B} \text{ mit } U \subset V\}$$

genau dann ein Filter auf M ist, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:
(FB1) Zu $U, U' \in \mathcal{B}$ gibt es stets ein $V \in \mathcal{B}$ mit $V \subset U \cap U'$,
(FB2) $\emptyset \notin \mathcal{B}$ und $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

Definition:
Sei M eine Menge. Ein Filter $\mathcal{F}$ auf M heißt *frei*, falls $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$ ist.

Aufgabe 24:
Sei $\mathcal{F}$ ein freier Filter auf der Menge X. Zeigen Sie:
- (a) X ist unendlich.
- (b) In der kofinalen Topologie auf X ist jedes Element von X ein Häufungspunkt von $\mathcal{F}$.
- (c) In der diskreten Topologie auf X hat $\mathcal{F}$ keinen Häufungspunkt.

Aufgabe 25:
Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf der Menge M. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:
- (i) $\mathcal{F}$ ist kein Hauptultrafilter.
- (ii) $\mathcal{F}$ ist frei, d.h. es gilt $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$.
- (iii) $\mathcal{F}$ enthält keine endliche Menge.
- (iv) M ist unendlich und $\mathcal{F}$ ist eine Verfeinerung des Filters der koendlichen Teilmengen von M.

Aufgabe 26:
Sei $(X, \leq)$ eine total geordnete Menge, und sei X mit der Ordnungstopologie zu $\leq$ versehen. Zeigen Sie, dass jede nichtleere, kompakte Teilmenge von X ein Maximum und ein Minimum bezüglich $\leq$ besitzt.

Abgabe: Dienstag 29.5.07 in der Vorlesung