Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Dr. K. J. Becher
29.5.2007

# Übungen zur Topologie

## Blatt 7

**Aufgabe 27:**
Sei $X$ die Sorgenfrey-Gerade, also die Menge $\mathbb{R}$ versehen mit der von den Intervallen $[a, b[$ mit $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ erzeugten Topologie (vgl. Blatt 3). Zeigen Sie:

($a$) Keine streng monoton steigende Folge reeller Zahlen konvergiert in $X$.
($b$) Kein echtes Intervall in $\mathbb{R}$ ist kompakt in $X$.
($c$) $X$ ist nicht lokalkompakt.
($d$) Zu jeder abgeschlossenen Menge $A \subset X$ und jedem Punkt $x \in X \setminus A$ existiert eine stetige Funktion $f : X \longrightarrow [0, 1]$ (wobei $[0, 1]$ mit der üblichen Topologie versehen ist) mit $f(x) = 0$ und $f(A) = \{1\}$.

**Aufgabe 28:**
Zeigen Sie, dass $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R},\, y > 0\} \cup \{(0, 0)\}$ mit der von $\mathbb{R}^2$ induzierten Spurtopologie nicht lokalkompakt ist.

**Aufgabe 29:**
Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die *$n$-Sphäre* $\mathbb{S}^n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\right\}$ versehen mit der Spurtopologie des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^{n+1}$. Es soll gezeigt werden, dass $\mathbb{S}^n$ homöomorph zur Alexandroff-Kompaktifizierung des (lokalkompakten) Raumes $\mathbb{R}^n$ ist. Sei dazu $\omega = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{S}^n$. Zu jedem Punkt $x \in \mathbb{S}^n \setminus \{\omega\}$ hat die Gerade durch $\omega$ und $x$ genau einen Schnittpunkt mit der Hyperebene $\{0\} \times \mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^{n+1}$; ist $(0, y_1, \ldots, y_n)$ dieser Schnittpunkt, so setzen wir $h(x) = (y_1, \ldots, y_n)$. Die so festgelegte Abbildung $h : \mathbb{S}^n \setminus \{\omega\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ wird als *stereographische Projektion* bezeichnet. Begründen Sie:

($a$) $h$ ist bijektiv.
($b$) Für einen Punkt $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ist $h^{-1}(y) = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $x_0 = \frac{-1+\|y\|^2}{1+\|y\|^2}$ und $x_i = \frac{2y_i}{1+\|y\|^2}$ für $1 \leq i \leq n$.
($c$) $h : \mathbb{S}^n \setminus \{\omega\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ist stetig und offen, also ein Homöomorphismus.
($d$) Die mit $h(\omega) = \omega_{\mathbb{R}^n} \in \alpha(\mathbb{R}^n)$ festgelegte Fortsetzung $h : \mathbb{S}^n \longrightarrow \alpha(\mathbb{R}^n)$ ist ein Homöomorphismus.

**Aufgabe 30:**
Seien $X$ ein topologischer Raum, $Y$ ein Hausdorffraum und $f, g : X \longrightarrow Y$ stetige Abbildungen. Zeigen Sie, dass aus der Existenz einer dichten Teilmenge $U \subset X$ mit $f|_U = g|_U$ schon $f = g$ folgt.

**Abgabe:** Dienstag 5.6.07 in der Vorlesung