Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Dr. K. J. Becher
5.6.2007

Übungen zur Topologie

Blatt 8

Aufgabe 31:
Zeigen Sie, dass ein topologischer Raum X genau dann ein T_4-Raum ist, wenn es in X zu jeder abgeschlossenen Menge A und jeder offenen Menge V mit $A \subset V$ eine offene Menge U mit $A \subset U \subset \overline{U} \subset V$ gibt.

Aufgabe 32:
Überprüfen Sie, dass auf der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ durch

$$\mathcal{T} = \{U \cup (V \cap \mathbb{Q}) \mid U, V \subset \mathbb{R} \text{ offen bezüglich der euklidischen Topologie}\}$$

eine Topologie gegeben ist, und entscheiden Sie, ob der topologische Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ regulär ist.

Definition:
Für eine Menge X bezeichnen wir mit $\widehat{X}$ die Menge der Ultrafilter auf X. Zu einer Teilmenge $U \subset X$ sei $\widehat{U}$ die Menge derjenigen Ultrafilter auf X, die U als Element enthalten. Wir betrachten X als Teilmenge von $\widehat{X}$, indem wir ein Element $x \in X$ mit dem in x zentrierten Hauptultrafilter $\{U \in \mathcal{P}(X) \mid x \in U\}$ identifizieren.

Aufgabe 33:
Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie:
(a) Die Mengen $\widehat{U}$ mit offenen Teilmengen $U \subset X$ bilden die Basis einer Topologie auf $\widehat{X}$.
(b) Bezüglich dieser Topologie ist $\widehat{X}$ kompakt, und der Raum X ist ein Unterraum von $\widehat{X}$, der dicht in $\widehat{X}$ liegt.
(c) Ist X diskret, so ist $\widehat{X}$ ein kompakter Hausdorffraum und jede Abbildung $X \longrightarrow Y$ in einen kompakten Hausdorffraum Y lässt sich in eindeutiger Weise zu einer stetigen Abbildung $\widehat{X} \longrightarrow Y$ fortsetzen.

Aufgabe 34:
Seien X ein topologischer Raum, Y ein Hausdorffraum, $f : X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung, und $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende (d.h. $K_{n+1} \subset K_n$ für $n \in \mathbb{N}$) Folge kompakter Teilmengen von X. Zeigen Sie, dass $f(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(K_n)$ gilt.

Abgabe: Dienstag 12.6.07 in der Vorlesung.