Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Dr. K. J. Becher
12.6.2007

Übungen zur Topologie

Blatt 9

Aufgabe 35:
Sei $\mathbb{K}$ einer der Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, mit der euklidischen Topologie versehen. Seien weiter X ein topologischer Raum und $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(X) = \{f : X \to \mathbb{K} \text{ stetig}\}$. Zeigen Sie:

(a) Die Addition $\alpha_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ und die Multiplikation $\mu_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ sind stetige Abbildungen, ebenso die Betragsfunktion $|\cdot| : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}$ und die Invertierung $\mathbb{K} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{K}, x \longmapsto \frac{1}{x}$.

(b) Für $f, g \in \mathcal{C}_{\mathbb{K}}(X)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ sind auch $f + g$, $f \cdot g$, $|f|$, $\lambda f \in \mathcal{C}_{\mathbb{K}}(X)$.

(c) Für $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{K}}(X)$ ist $|f| \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$.

(d) Für $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{K}}(X)$ ist $U_f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ offen in X und die Abbildung $\frac{1}{f} : U \longrightarrow \mathbb{K}$, $x \longmapsto \frac{1}{f(x)}$ ist stetig.

Aufgabe 36:
Sei $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Familie nichtleerer Hausdorffräume derart, dass $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ lokalkompakt ist. Zeigen Sie, dass die Räume X_α ($\alpha \in I$) alle lokalkompakt und fast alle kompakt sind.

Aufgabe 37:
Zeigen Sie, dass die Sorgenfrey-Gerade X normal ist, während die Sorgenfrey-Ebene $X \times X$ nicht normal ist. Untersuchen Sie zum Nachweis der zweiten Behauptung den Unterraum $\{(x, -x) \mid x \in X\}$ von $X \times X$.

Aufgabe 38:
Seien X ein nichtleerer, kompakter Hausdorffraum und $f : X \longrightarrow X$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass es eine nichtleere, abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$ mit $f(A) = A$ gibt.

Aufgabe 39:
Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen. Sei dazu $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$, betrachtet als Unterraum von $X \times Y$. Zeigen Sie: Die Abbildung $g : X \longrightarrow G_f, x \longmapsto (x, f(x))$ ist ein Homöomorphismus. Ist Y hausdorffsch, so ist G_f abgeschlossen in $X \times Y$.

Abgabe: Dienstag 19.6.07 in der Vorlesung.