Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. J. Beran
WS 2007/08
29. Januar 2008

10. Übungsblatt zur Mathematischen Statistik

Aufgabe 1
Es sei $X_1, \ldots, X_n$ ein Stichprobe aus einer Uniformverteilung $U(0,\theta)$. Sei $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ und definiere

$$\delta_c(X) = \begin{cases} 1 & \text{falls } M_n \geq c \\ 0 & \text{falls } M_n < c \end{cases}.$$

(a) Berechnen Sie die Gütefunktion von δ_c und zeigen Sie, dass sie monoton steigend in θ ist.

(b) Wie müsste c gewählt werden, so dass beim Testen von $H_0 : \theta \leq \frac{1}{2}$ vs. $H_a : \theta > \frac{1}{2}$ das Konfidenzniveau genau 0.05 wäre.

(c) Skizzieren Sie die Gütefunktion von δ_c für die Situation in (b) bei $n = 20$.

(d) Wie groß müsste der Stichprobenumfang n sein, so dass δ_c in (b) eine Güte von 0.98 hat bei $\theta = \frac{3}{4}$.

(e) Für eine Stichprobe vom Umfang $n = 20$ sei $M_n = 0.48$, bestimmen Sie den p-Value.

Aufgabe 2
Es sei $X_1, \ldots, X_n$ eine Stichprobe aus einer Bernoulliverteilung mit Paramter p. Betrachten Sie das Testproblem $H_0 : p = 0.5$ vs. $H_a : p = p_1$ mit $0.5 < p_1 < 1$. Die Nullhypothese werde verworfen, falls $\sum_{i=1}^n X_i = n$.

(a) Berechnen Sie das Konfidenzniveau und die Güte des Tests falls $p_1 = 0.6$ in den Fällen $n = 3$ und $n = 10$. Wie ändern sich diese Werte falls $p_1 = 0.9$?

(b) Sei $n = 10$ und $p_1 = 0.6$. Konstruieren Sie mithilfe des Neyman-Pearson Lemmas einen (randomisierten) mächtigsten Test zum Konfidenzniveau 0.05. Bestimmen Sie ausserdem die Güte dieses Tests.

Aufgabe 3
Betrachten Sie eine Population mit drei verschiedenen Arten 1, 2 und 3 deren Anteile entsprechend den Hardy-Weinberg Proportionen $f(1,\theta) = \theta^2$, $f(2,\theta) = 2\theta(1-\theta)$ und $f(3,\theta) = (1-\theta)^2$ verteilt sind. Für eine Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ aus dieser Population bezeichne N_1, N_2 bzw. N_3 die Anzahl der X_i der Art 1, 2 bzw. 3. Sei $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$.

(a) Zeigen Sie, dass die Likelihood-Ratio Funktion $LR(X)$ monoton steigend in $2N_1 + N_2$ ist.

(b) Es seien $c > 0$ und $\alpha \in (0,1)$ gegeben mit $P_\theta(2N_1 + N_2 \geq c) = \alpha$. Betrachten Sei das Testproblem $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_a : \theta = \theta_1$ und zeigen Sie, dass der Test, der H_0 verwirft genau dann wenn $2N_1 + N_2 \geq c$, am mächtigsten ist.