Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. J. Beran
7. November 2007

WS 2007/08

2. Übungsblatt zur Mathematischen Statistik

Aufgabe 1 Es sei $X_1, \dots, X_n$ eine unabhängige Stichprobe einer Population mit Varianz σ^2, $0 < \sigma^2 < \infty$.

(a) Zeigen Sie, dass $(n-1)^{-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ ein erwartungstreuer Schätzer für σ^2 ist.

(b) Es gelte weiter $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

  (i) Zeigen Sie, dass $\mathrm{MSE}(s^2) = 2(n-1)^{-1}\sigma^4$.

  (ii) Definiere $\hat{\sigma}_c^2 = c \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{MSE}(\hat{\sigma}_c^2)$ an der Stelle $c = (n-1)^{-1}$ minimiert wird.

Aufgabe 2 Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig identisch Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$.

(a) Zeigen Sie direkt (d. h. mithilfe der Definition), dass $\sum_{i=1}^n X_i$ suffizient für λ ist.

(b) Zeigen Sie dasselbe unter Verwendung des Faktorisierungstheorems.

(c) Sei $n = 2$, dann ist $X_1 + X_2$ suffizient für λ. Gilt dasselbe für $X_1 + 2X_2$?

Aufgabe 3 Es sei $X_1, \dots, X_n$ eine unabhängige Stichprobe aus einer Verteilung mit einer der folgenden Dichtefunktionen.

- **(Beta)** $p(x, \theta) = \theta x^{\theta - 1}$, $0 < x < 1, \theta > 0$.
- **(Weibull)** $p(x, \theta) = \theta a x^{\theta - 1} \exp(-\theta x^a)$, $x > 0, \theta > 0, a > 0$.
- **(Pareto)** $p(x, \theta) = \frac{\theta a^\theta}{x^{\theta+1}}$, $x > a, \theta > 0, a > 0$.

Bestimmen Sie in jedem Fall eine reellwertige suffiziente Statistik für θ. Nehmen sie dabei an, dass a fest ist.

Aufgabe 4 Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig, identisch uniform-verteilt über dem Intervall $[0, \theta]$. Geben Sie den Stichprobenraum und eine für θ suffiziente Partition an.