

4. Übungsblatt zur Mathematischen Statistik

Aufgabe 1

Geben Sie – basierend auf einer Zufallsstichprobe der Größe n – für $X \sim f(x; \mu, \sigma)$ mit

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\log x - \mu)^2\right), \quad x > 0$$

eine suffiziente Statistik an.

Aufgabe 2

- (a) Zeigen Sie, dass die Klasse der hypergeometrischen Wahrscheinlichkeitsverteilungen $\mathcal{P} = \{P_D : D = 0, 1, \dots, N\}$, mit

$$P_D \{X = x\} = \binom{N}{n}^{-1} \binom{D}{x} \binom{N-D}{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, \min\{n, D\}$$

vollständig ist.

- (b) Ist $\mathcal{P} = \{P_D : D = 0, 1, 2, \dots, n, D \neq d\}$ mit $d \in \mathbb{N}$, $0 \leq d \leq n$ vollständig?

Aufgabe 3

Sei X_1, X_2, \dots, X_n eine Stichprobe aus der Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{x}{\theta^2} e^{-\frac{x}{\theta}} & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x \leq 0 \end{cases} \quad \theta > 0.$$

Zeigen Sie:

- (a) $\sum_{i=1}^n X_i^2$ ist eine minimal suffiziente Statistik für θ ,
- (b) $\sum_{i=1}^n X_i$ ist nicht suffizient für θ .

Aufgabe 4

Ist die folgende Verteilungsfamilie regulär im Sinne von Cramér und Rao?
Falls ja, geben Sie – basierend auf einer Stichprobe der Größe n – für

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{x}{\theta^2} e^{-\frac{x}{\theta}} & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x \leq 0 \end{cases} \quad \theta > 0$$

die Fisher-Information an.