Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. J. Beran
WS 2007/08
27. November 2007

5. Übungsblatt zur Mathematischen Statistik

Aufgabe 1

(a) Bestimmen Sie in den folgenden Fällen mithilfe der Chapman-Robbins-Ungleichung eine untere Schranke für die Varianz eines unverzerrten Schätzers für θ. Zeigen Sie außerdem, dass diese Schranke nicht angenommen wird.

   (i) $X \sim U[0, \theta]$.

   (ii) X mit Dichte $f(x) = e^{-(x-\theta)}$ für $x > \theta$.

   Berechnen Sie in den beiden Fällen formal die Cramer-Rao-Schranke und vergleichen Sie die Ergebnisse.

(b) Betrachten Sie die diskrete Gleichverteilung

$$P_N(X = k) = \frac{1}{N}, \quad k = 1, 2, \ldots, N$$

   mit $\Theta = \{N : N \geq M\}$ und bekanntem $M > 1$, und bestimmen Sie die Chapman-Robbins-Ungleichung.

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass die Cramer-Rao-Schranke von einem unverzerrten Schätzer angenommen wird, falls eine i.i.d. Stichprobe aus folgenden Verteilungen gegeben ist:

(a) $f_\theta(x) = \theta^{-1} e^{-x/\theta}$ für $x > 0$; $\theta > 0$.

(b) $f_\theta(x) = \theta(1-\theta)^x$ für $x = 0, 1, 2, \ldots; 0 < \theta < 1$.

(c) $f_{\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2}$ für $-\infty < x < \infty$; $\sigma^2 > 0$.

Aufgabe 3
$X_1, X_2, \ldots, X_n$ seien unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen mit
i) E$[X_i]$= μ ii) Var$(X_i) < \infty$.
Berechnen Sie die relative Effizienz des unverzerrten (und konsistenten) Schätzers
$T = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} iX_i$ bezüglich $\bar{X}$.

Aufgabe 4
Sei $X_1, X_2, \ldots, X_n$ eine Stichprobe aus einer $\mathcal{N}(\mu, 1)$-Verteilung, und geschätzt werden soll $g(\mu) = \mu^2$.
Zeigen Sie:

a) Für jeden Schätzer T für μ^2, der die Cramer-Rao-Ungleichung erfüllt, ist die Varianz beschränkt durch $\frac{4\mu}{n}$.

b) i) $T(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \bar{X}^2 - \frac{1}{n}$ ist MVUE für μ^2.

   ii) $Var(T) = \frac{4\mu^2}{n} + \frac{2}{n^2}$.