Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. J. Beran
3. Dezember 2007

WS 2007/08

6. Übungsblatt zur Mathematischen Statistik

Aufgabe 1

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. exponentialverteilte Zufallsvariablen, also $f_\theta(x) = \theta^{-1} e^{-x/\theta}$. Sei $t > 0$ fix und bestimmen Sie den MVUE von $\rho = P(X_i > t)$. *Hinweis:* Benutzen Sie dabei, dass $X_1/\overline{X}$ und $\overline{X}$ unabhängig sind.

Aufgabe 2

Es sei $X_1, \ldots, X_n$ eine i.i.d. Stichprobe mit Erwartungswert $\mu = E(X_i)$ und endlicher Varianz $\sigma^2 = Var(X_i) < \infty$. Bestimmen Sie in den Fällen $\mu = 0$ und $\mu \neq 0$ die asymptotische Verteilung von

$$\text{(a) } \overline{X}^2 \quad \text{(b) } 1/\overline{X} \quad \text{(c) } \ln|\overline{X}|^2 \quad \text{(d) } \exp \overline{X}.$$

Aufgabe 3

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. Zufallsvariablen und $Y_n = \overline{X}$. Geben Sie eine varianzstabilisierende Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, d.h. die asymptotische Varianz von $g(Y_n)$ soll unabhängig von θ sein, wobei

(a) $P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = \theta$, $\theta \in [0, 1]$,

(b) X_i exponentialverteilt mit Parameter θ, $\theta > 0$.

Aufgabe 4

(a) Eine Zufallsvariable X heißt log-normalverteilt mit Parametern $\mu, \sigma > 0$ ($X \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma)$), falls X die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} x} \exp\left(-\frac{(\ln(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad x > 0$$

besitzt. Zeigen Sie:

$$X \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma) \Longleftrightarrow \ln X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma).$$

Berechnen Sie in diesem Fall den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $Var(X)$.

(b) Es seien $X_0, X_1, \ldots$ i.i.d. standard-normalverteilte Zufallsvariablen. Definiere mit $\mu, \sigma > 0$ und $\mu < \frac{\sigma^2}{2}$

$$S_n = X_0 + \exp\left(\sigma \sum_{i=1}^{n} X_i + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) n\right).$$

Zeigen Sie, dass S_n für $n \to \infty$ in Verteilung gegen X_0 konvergiert, d.h.

$$S_n \xrightarrow{d} X_0,$$

aber $E(S_n) \to \infty$ und $Var(S_n) \to \infty$ für $n \to \infty$.