Universität Konstanz WS 2007/08
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. J. Beran
7. Januar 2008

7. Übungsblatt zur Mathematischen Statistik

Aufgabe 1
Es sei T_n ein unverzerrter Schätzer für θ, so dass für alle n, $Var(T_n) < \infty$ und $Var(T_n) \leq Var(U_n)$ für alle unverzerrten Schätzer U_n für θ gilt. Zeigen Sie, dass $T_n \stackrel{L^2}{\to} \theta$ für $n \to \infty$, d.h. ein MVUE ist schwach konsistent für θ.

Aufgabe 2
Seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. mit $E(X_1) = \mu$, $Var(X_1) = 1$ und $E(X_1^4) < \infty$. Definiere

$$T_{1n} = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 1 \quad \text{und} \quad T_{2n} = \overline{X}^2 - n^{-1}$$

um $\varphi = \mu^2$ zu schätzen.

(a) Bestimmen Sie die asymptotische relative Effizienz $as.eff(T_{1n}, T_{2n})$.

(b) Zeigen Sie, dass $as.eff(T_{1n}, T_{2n}) \leq 1$ falls $X_1 - \mu$ eine um 0 symmetrische Verteilung besitzt.

(c) Geben Sie eine Verteilung an, so dass $as.eff(T_{1n}, T_{2n}) > 1$.

Aufgabe 3
Seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. normalverteilt mit Erwartungswert Null und unbekannter Varianz $\sigma^2 > 0$. Um σ zu schätzen betrachten wir die Schätzer

$$T_{1n} = \sqrt{\pi/2} \sum_{i=1}^{n} |X_i|/n \quad \text{und} \quad T_{2n} = (\sum_{i=1}^{n} X_i^2/n)^{1/2}.$$

Zeigen Sie, dass die relative asymptotische Effizienz von T_{1n} bzgl. T_{2n} gegeben ist durch $(\pi-2)^{-1}$.

Aufgabe 4
Es seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. und $\theta = median(X_1)$. Weiter sei T_n der Stichprobenmedian von $(X_1, \ldots, X_n)$.

(a) Bestimmen Sie den bias-korrigierten Jackknife-Schätzer $T_{Jackknife}$ im Fall n gerade und n ungerade.

(b) Sei nun X_i uniformverteilt über dem Intervall $[\theta - 1, \theta + 1]$ und n ungerade. Bestimmen Sie $E(T_n), E(T_{Jackknife})$ und $Var(T_n), Var(T_{Jackknife})$.