Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. J. Beran
WS 2007/08
22. Januar 2008

9. Übungsblatt zur Mathematischen Statistik

Aufgabe 1
Es sei $\alpha \in (0, 0.5)$ gegeben. Für eine Verteilung F auf $\mathbb{R}$ sei das Funktional T definiert durch

$$T(F) = (1 - 2\alpha)^{-1} \int_{F^{-1}(\alpha)}^{F^{-1}(1-\alpha)} x dF(x).$$

mit $F^{-1}(y) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \{F(x) \geq y\}$.

(a) Es sei $P := \{F | \text{Es gibt } \theta \in \mathbb{R} \text{ mit } F(\theta + x) = 1 - F_\theta(\theta - x), x \geq 0\}$ die Familie aller Verteilungen, die symmetrisch um einen Parameter θ sind. Zeigen Sie, dass T auf P Fisher-konsistent für θ ist.

(b) Bestimmen Sie die Einflussfunktion von T und zeigen Sie, dass sie beschränkt ist.

(c) Es sei $F_n(x)$ die empirische Verteilungsfunktion zu einer Stichprobe $(X_1, \ldots, X_n)$. Zeigen Sie, dass

$$T(F_n) = \frac{1}{(1 - 2\alpha)n} \sum_{j=m_\alpha+1}^{n-m_\alpha} X_{(j)},$$

wobei $X_{(j)}$ die Ordnungsstatistiken sind und $m_\alpha = [n\alpha]$ falls $n\alpha \notin \mathbb{N}$ und $m_\alpha = n\alpha - 1$ falls $n\alpha \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2
Sei $(X_1, \ldots, X_n)$ eine Stichprobe aus einer Verteilung die durch eine der folgenden Dichten f_θ gegeben ist. Bestimmen sie jeweils den MLE von θ.

(a) $f_\theta(x) = \theta^{-1}$ für $x = 1, 2, \ldots, \theta$ und θ sei eine natürliche Zahl zwischen 1 und θ_0.

(b) $\frac{\theta}{1-\theta} x^{(2\theta-1)/(\theta-1)}$ für $x \in (0, 1)$, $\theta \in (0.5, 1)$.

(c) $f_\theta(x) = 2^{-1} e^{-|x-\theta|}$ für $x \in \mathbb{R}$.

(d) $f_\theta(x) = \binom{\theta}{x} p^x (1-p)^{\theta-x}$ für $x = 1, 2, \ldots, \theta$ und $\theta \in \mathbb{N}$. Dabei sei $p \in (0, 1)$ bekannt.

Aufgabe 3
Es sei $(X_1, \ldots, X_n)$ eine Stichprobe aus der Weibull-Verteilung mit Lebesguedichte

$$f(x) = \alpha \theta^{-1} x^{\alpha-1} e^{-x^\alpha/\theta}$$

für $x > 0$, wobei $\alpha > 0$ und $\theta > 0$ unbekannt sind. Zeigen sie, dass die likelihood-Gleichungen äquivalent sind zu $h(\alpha) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \log(X_i)$ und $\theta = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i^\alpha$, wobei

$$h(\alpha) = (\sum_{i=1}^n X_i^\alpha)^{-1} \sum_{i=1}^n X_i^\alpha \log X_i - \alpha^{-1},$$

und dass die likelihood-Gleichungen eine eindeutige Lösung besitzen.

Aufgabe 4
Es sei $(X_1, \ldots, X_n)$ eine Stichprobe aus einer $\mathcal{N}(\mu, 1)$-Verteilung, die an zwei bekannten Punkten $\alpha < \beta$ trunkiert wurde, d.h. X_i besitzt die Dichte

$$f(x) = \left(\sqrt{2\pi}[\Phi(\beta - \mu) - \Phi(\alpha - \mu)]\right)^{-1} e^{-(x-\mu)^2/2}, \quad \alpha < x < \beta,$$

wobei Φ die Verteilungfunktion der Standard-Normlaverteilung ist. Zeigen sie, dass das arithmetische Mittel $\overline{X}$ der eindeutige MLE von $\theta = EX_i$ ist und bestimmen Sie dessen asymptotische Verteilung.