Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. J. Beran
WS 2007/08
10. Dezember 2007

3. Computerübung zur Mathematischen Statistik

Aufgabe 1
Gegeben sei die Situation aus Theorieblatt 6 Aufgabe 4

(a) Simulieren Sie zunächst 100 log-normalverteilte Daten mit $\mu = 2$ und $\sigma = 4$ über den Befehl rlnorm(x, meanlog, sdlog).
Simulieren Sie dann normalverteilte Daten im gleichen Umfang und mit gleichen Parametern und exponentieren Sie die erzeugten Daten. Verifizieren Sie dann die theoretische Aussage von Aufgabe 4a). Verwenden Sie dazu Histogramm und QQ-Plot(hist,qqplot). Um das Ergebnis besser zu sehen sollten Sie dann n erhöhen auf 10.000 (100.000).

(b) Simulieren Sie 10(20,30,...,100,500,1000) i.i.d. standard-normalverteilte Zufallsvariablen und berechnen Sie S_n für $X_0 = 5$, $\sigma = 2$ und $\mu = 1.9$.

$$S_n = X_0 + exp(\sigma \sum_{i=1}^{n} X_i + (\mu - \sigma^2/2)n)$$

Zeigen Sie dann, dass für steigendes n die Verteilung von S_n gegen eine Punktverteilung bei $X_0 = 5$ konvergiert, dass aber Erwartungswert und Varianz ins Unendliche steigen (siehe Aufgabe 4b).

Aufgabe 2 Es seien X_i i.i.d. $\mathcal{N}(\theta, 1)$. Definiere

$$\hat{\theta}_n = \begin{cases} 0 & |\overline{X}| \leq n^{-1/4} \\ \overline{X} & |\overline{X}| > n^{-1/4} \end{cases}$$

Simulieren Sie für verschiedene Werte von θ (0.001, 0.01,0.1) den MSE von $\hat{\theta}_n$ und veranschaulichen Sie ihr Ergebnis grafisch.Wählen Sie n = 100 (1000,10000) Geben Sie zum Vergleich außerdem den MSE von $\overline{X}_n$ an.

Aufgabe 3 (Beta-Bayes-Schätzer)
Gegeben Sei die Situation aus Aufgabe 3c),Blatt 2.Nun soll der Maximum-Likelihood Schätzer $\overline{X}_n$ mit dem Bayes Schätzer

$$\widetilde{p} := \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i + \sqrt{n/4}}{n + \sqrt{n}}$$

verglichen werden.Berechnen Sie den MSE von $\widetilde{p}$ und vergleichen Sie wiederum durch Zeichnung mit dem MSE von $\overline{X}_n$!Betrachten Sie dabei n=4 und n=20.