Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik
Dr. Florian Berchtold

Übungen zur Geometrie II — Blatt 1

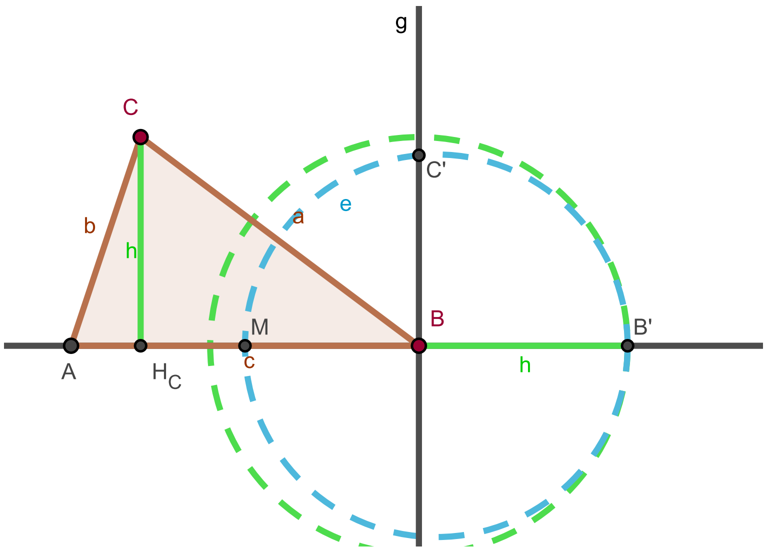
Lösungen

Aufgabe 1.1 Man konstruiere zu einem Dreieck ein flächengleiches Quadrat.

Lösung: Es sei ABC das gegebene Dreieck und H_C der Höhenfußpunkt der Höhe durch C. Dann hat ABC den Flächeninhalt $F = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CH_C|$. Mit bekannten Methoden lassen sich der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{A}$ konstruieren sowie die Strecke $\overline{CH_C}$ auf AB von B aus in die entgegengesetzte Richtung von A abtragen. Der Endpunkt dieser Strecke sei B'. Zeichnet man nun den Thaleskreis über $\overline{MB'}$ sowie die Orthogonale zu AB durch B (wie üblich), so erhält man einen Schnittpunkt C'. Dann ist $\overline{BC'}$ Seite des gesuchten Quadrats.

Die Strecke $\overline{BC'}$ ist nämlich Höhe im Dreieck $MB'C'$ und nach dem Höhensatz gilt daher

$$|BC'|^2 = |MB| \cdot |BB'| = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CH_C|.$$



Aufgabe 1.2 Für $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{<0}$ sowie

$$b := \frac{\sqrt{|a|}}{|a + |a||}(a + |a|)$$

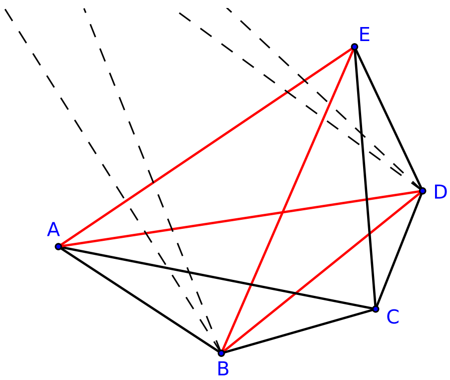
zeige man $b^2 = a$.

Beweis: Es gilt

$$b^2 = |a| \cdot \frac{(a+|a|)^2}{(a+|a|)(\bar{a}+|a|)} = |a| \cdot \frac{a^2+2a|a|+|a|^2}{a\bar{a}+a|a|+\bar{a}|a|+|a|^2} = |a| \cdot \frac{a(a+2|a|+\bar{a})}{|a|(a+2|a|+\bar{a})} = a.$$

Aufgabe 1.3 Man zeige: Ist $n \geq 5$ und unterteilen die Verbindungslinien jeden Innenwinkel des n-Ecks in gleich große Teilwinkel, so ist das n-Eck regelmäßig, d.h. alle Seiten und alle Innenwinkel sind kongruent.

Beweis: Wir betrachten fünf aufeinanderfolgende Ecken des n-Ecks und bezeichnen die Winkelwerte mit $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, usw. Die Verbindungsstrecken unterteilen jeden Winkel offenbar in $m := n-2$ gleichgroße Stücke, die wir der Einfachheit halber mit α, β, γ, δ und ε notieren. Es gilt also etwa $m\alpha = \sphericalangle A$. Zur Vereinfachung betrachte man folgende Skizze:



Durch Anwendung des Winkelsummensatzes 2.2.3 und des Scheitelwinkelsatzes 1.2.23 erhält man folgende fünf Gleichungen (die erste folgt beispielsweise aus der in der Skizze rot markierten Figur):

$$\alpha+\varepsilon = \beta+\delta,\ 2\alpha+(m-2)\beta = 2\varepsilon+(m-2)\delta,\ \alpha+\delta = \beta+\gamma,\ \gamma+\delta = \beta+\varepsilon \text{ und } \beta+m\gamma+\delta = \pi$$

Das heißt, die Winkelwerte lösen das lineare Gleichungssystem

$$Ax = b \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & m-2 & 0 & -(m-2) & -2 \\ 0 & 1 & m & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und } b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \pi \end{pmatrix}.$$

Offenbar ist $x = (\frac{\pi}{n}; \frac{\pi}{n}; \ldots; \frac{\pi}{n})$ eine Lösung des Systems. Da die Matrix A vollen Rang hat (man kann etwa $\det(A) = 2n^2$ nachrechnen), ist dieses LGS eindeutig lösbar und es folgt $\sphericalangle A = \sphericalangle B$ und schließlich, da die Wahl der fünf Punkte A, B, C, D, E ja beliebig war, dass alle Winkel gleich groß sind.

Nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes 2.2.8 ist dann etwa auch das Dreieck ABC gleichschenklig, also gilt $|AB| = |AC|$. Dies zeigt man analog auch für die anderen Seiten.

Für Vierecke ist diese Aussage falsch! Dies sieht man beispielsweise anhand einer Raute, die kein Quadrat ist.